

Сибирский государственный университет путей сообщения  
Кафедра «Строительная механика»

**СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА.  
СБОРНИК ЗАДАЧ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ  
РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ.**

Карманова Т.Ф., Суровин П.Г.

Новосибирск, 201\_.

УДК 624.04(076.1)

Карманова Т.Ф., Суровин П.Г. Строительная механика. Сборник задач для выполнения расчетно-графических работ. Сибирский государственный университет путей сообщения. Новосибирск, 201\_, стр. \_\_

В сборнике приводятся варианты задач к расчетно-графическим работам, охватывающие основные разделы дисциплины «Строительная механика». Сборник предназначен для бакалавриата и специалитета по направлению «Строительство» (специальности/профили СМТ, СД, СП). Для всех задач приводятся примеры решений. Сборник также снабжен справочными данными, необходимыми для решения задач.

Утвержден редакционно-издательским советом университета в качестве задачника.

Ответственный редактор: к.т.н., доц. Маслов Е.Б.

Рецензенты: кафедра «Строительная механика» НГАСУ (Сибстрин), зав. каф. д-р техн. наук, проф. Гребенюк Г.И.

## Введение

В сборнике содержатся многовариантные задачи по курсу строительной механики, предназначенные для самостоятельного выполнения студентами расчетно-графических работ.

Расчетно-графические работы делятся на несколько частей.

Для студентов специальности СМТ в пятом семестре:

1. Расчет статически определимых сооружений на неподвижную нагрузку (задачи №№1, 2, 3);
2. Расчет статически определимых сооружений на подвижную нагрузку (задачи №№ 4, 5, 7, 8);
3. Определение перемещений в статически определимых сооружениях (задачи №№ 9, 10).

В шестом семестре:

4. Расчет статически неопределимых сооружений методом сил (задачи №№ 11, 12);
5. Расчет сооружений методом перемещений (задачи №№ 14, 16)
6. Расчет сооружений на ЭВМ (задачи №№ 17, 18, 19).

Для студентов специальности СД в пятом семестре:

1. Расчет статически определимых сооружений на неподвижную нагрузку (задачи №№1, 2, 3);
2. Расчет статически определимых сооружений на подвижную нагрузку (задачи №№ 4, 5, 6,);
3. Определение перемещений в статически определимых сооружениях (задачи №№ 9, 10).

В шестом семестре:

4. Расчет статически неопределимых сооружений методом сил (задачи №№ 11, 12);
5. Расчет сооружений методом перемещений (задачи №№ 14, 16);
6. Расчет сооружений на ЭВМ (задачи №№ 17, 18, 19,).

Для студентов специальности СП в шестом семестре:

1. Расчет сооружений на неподвижную нагрузку (задача № 11, 3, 13, 14, 16);
2. Расчет сооружений на подвижную нагрузку (задачи №№ 4, 5, 6);
3. Расчет сооружений на ЭВМ (задачи №№ 17, 18, 19).

Студенты заочного факультета специальностей СМТ и СД в седьмом семестре: КР1 – задача № 1; КР2 – задачи №№ 5, 6

В восьмом семестре: КР3 – задача № 9; КР4 – задача № 11, 12; КР5 – задачи №№ 15, 16

Студенты заочного факультета специальностей СП и УС:

КР1 – задачи №№ 5, 6

КР2 – задачи №№ 11, 15

Выбор варианта производится следующим образом. Расчетная схема выбирается по номеру в журнале. Студенты заочного факультета расчетную схему выбирают по последней цифре шифра. Исходные данные выбираются по фамилии студента. Для этого следует заготовить вспомогательную таблицу из трех строк. Первая строка повторяет шапку таблицы выбора варианта из задачи. Во вторую строку последовательно, по одной, записываются буквы фамилии студента. В третью строку записываются данные из таблицы выбора варианта. Например, студент Петров выбирает данные для задачи №1.

Для величины  $q$  следует взять числовое значение из таблицы 1 из строки с буквой «П», для  $P_1$  – из строки с буквой «е», и.т.д. Таким образом, следует принять  $q = 8 \text{ кН/м}$ ,  $P_1 = 12 \text{ кН}$ ,  $P_2 = -10 \text{ кН}$  и  $M = -10 \text{ кНм}$ . Если фамилия короткая (содержит мало букв), то ее следует повторить в таблице выбора варианта.

$q$ , кН/м	$P_1$ , кН	$P_2$ , кН	$m$ , кНм		
П	е	т	р	о	в
8	12	10*	10*		

Во всех задачах если не указано положение шарниров или сил, то считать, что они расположены в середине стержня.

#### Список принятых обозначений

Обозначение	Наименование величины	Единица измерения
$q$	Внешняя распределенная нагрузка	кН/м
$P$	Внешняя сосредоточенная сила	кН
$m$	Внешняя пара сил	кНм
$T_в, T_н, T_0$	Температуры: внутренняя, наружная и температура закрепления сооружения соответственно	°С
$H, V, R, M$	Опорные реакции	разная
$M, M_{OK}$	Изгибающий момент в сечении	кНм
$Q$	Поперечная сила в сечении	кН
$N$	Продольная сила в сечении	кН
$\Delta$	Возможное перемещение	разная
$x, y$	Координаты сечения	м
$\delta_{ij}$	Единичный коэффициент канонического уравнения метода сил – перемещение по направлению $i$ -ой отброшенной связи от $X_j=1$	разная
$\Delta_{iP}, \Delta_{iC}, \Delta_{iT}$	Перемещение сечения от внешней нагрузки, осадки опор, изменения температуры соответственно. Грузовой коэффициент канонического уравнения метода сил – перемещение по направлению $i$ -ой отброшенной связи от внешней нагрузки, осадки опор, изменения температуры соответ-	разная

	ственно.	
$X_i$	Неизвестное метода сил	разная
$r_{ij}$	Единичный коэффициент канонического уравнения метода перемещений – реакция в $i$ -ой дополнительной связи от $Z_j=1$	разная
$R_{iP}, R_{iC}, R_{iT}$	Грузовой коэффициент канонического уравнения метода перемещений – реакция в $i$ -ой дополнительной связи от внешней нагрузки, осадки опор, изменения температуры соответственно.	разная
$Z_i$	Неизвестное метода перемещений	разная
$\sigma_T$	Предел текучести материала стержня	кПа
$R_y$	Расчетное сопротивление материала стержня	кПа
$E$	Модуль упругости материала стержня	кПа
$\alpha$	Коэффициент температурного расширения материала стержня	$1/^\circ\text{C}$
$W_Z$	Момент сопротивления поперечного сечения стержня	$\text{см}^3$
$S_Z^{1/2}$	Статический момент полусечения	$\text{см}^3$
$J_Z$	Момент инерции поперечного сечения стержня	$\text{см}^4$
$A$	Площадь поперечного сечения стержня	$\text{см}^2$
$M_{np}, M_{расч}$	Предельный и расчетный изгибающие моменты соответственно	кНм
$\omega$	Площадь под графиком (эпюра либо линия влияния)	разная
$y_i, y_R$	Ординаты линии влияния	разные

**Задача 1.** Построение эпюр внутренних усилий в статически определимой раме.

Требуется:

1. Найти опорные реакции.
2. Построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.
3. Выполнить проверки равновесия узлов.

Исходные данные принять по таблице 1, расчетная схема выбирается по рисунку 1.

Таблица 1

Исходные данные к задаче 1.

Алфавит	$q$ , кН/м	$P_1$ , кН	$P_2$ , кН	$m$ , кНм
а б в	2	10	10	10
г д е	3	12	12	12
ж з и й	4	15	15	15
к л м	6	20	20	20
н о п	8	25	25	25
р с т	2*	10*	10*	10*
у ф х	3*	12*	12*	12*
ц ч ш	4*	15*	15*	15*
щ ь ы ь	6*	20*	20*	20*
э ю я	8*	25*	25*	25*

Примечание: знак (\*) означает, что направление нагрузки следует изменить на противоположное.

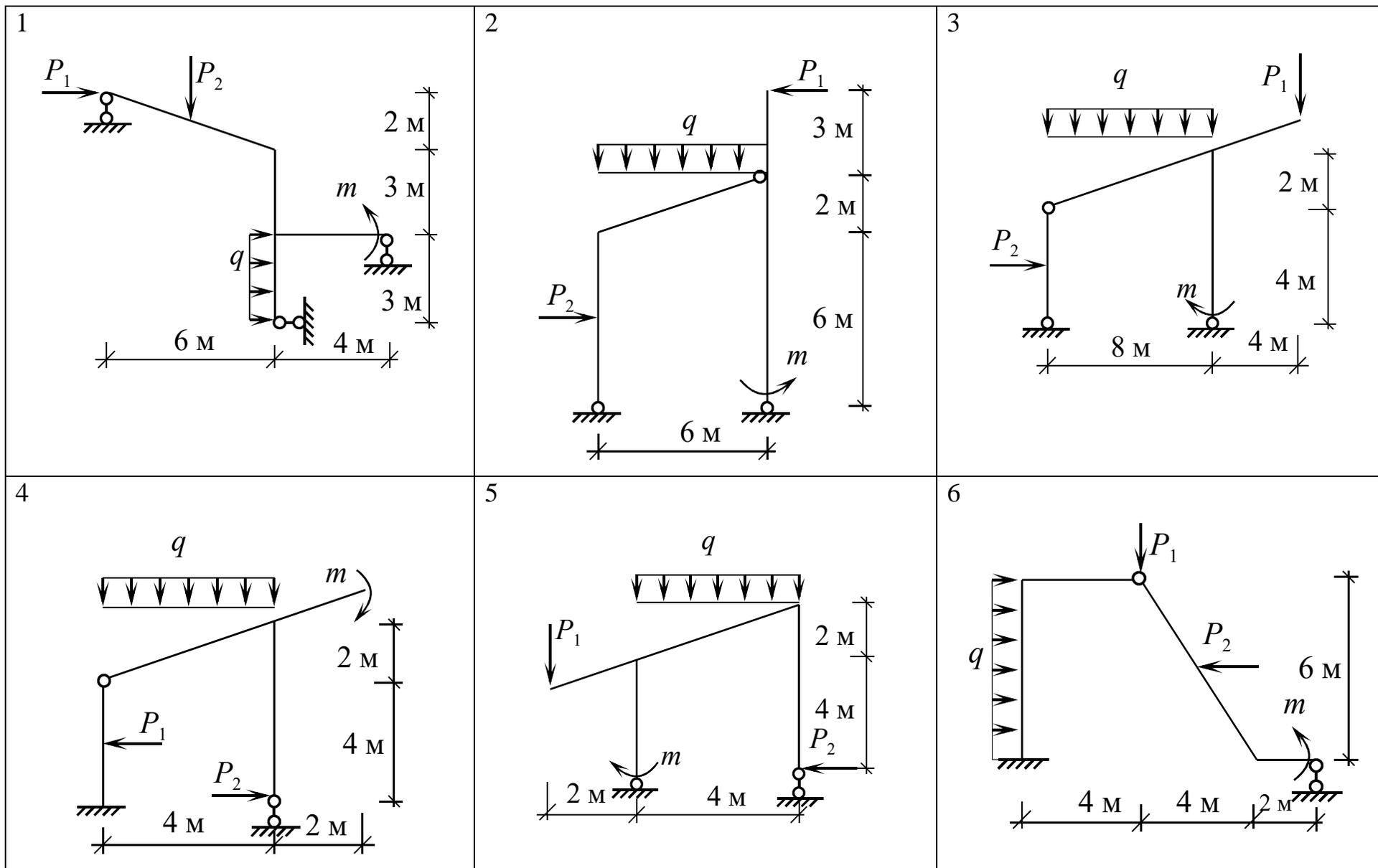


Рисунок 1. Расчетные схемы к задаче 1.

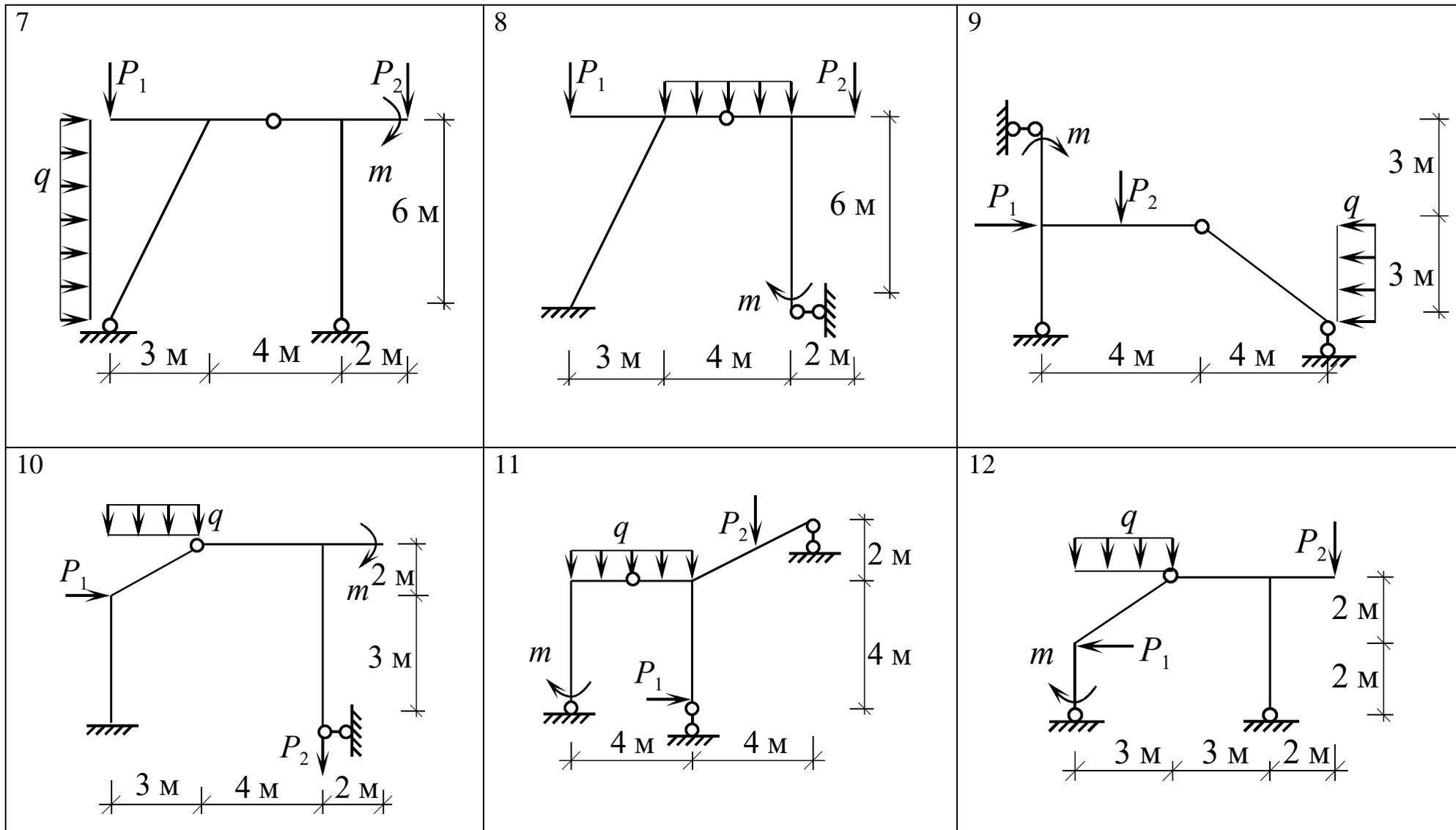


Рисунок 1. Расчетные схемы к задаче 1 (продолжение).

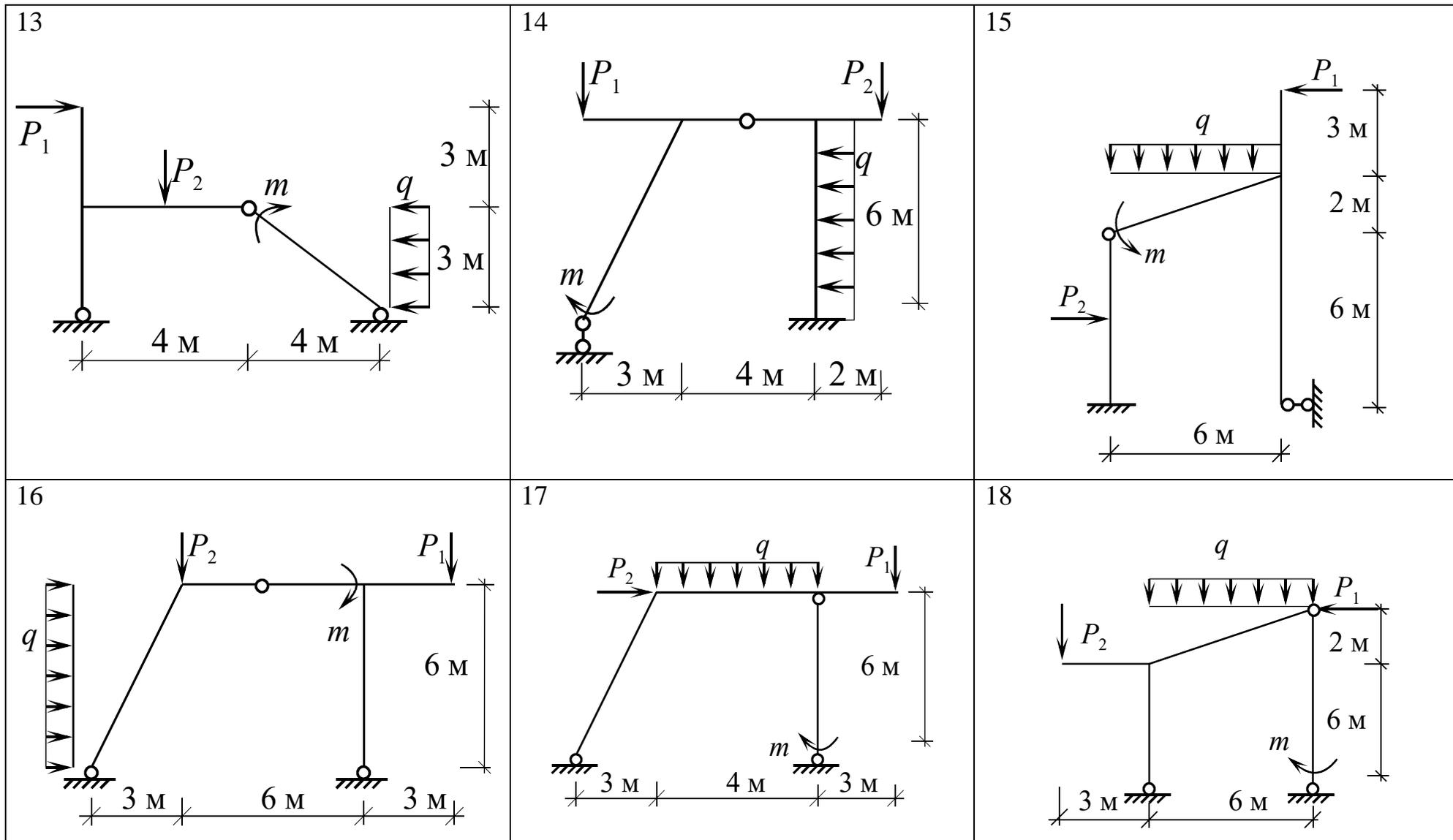


Рисунок 1. Расчетные схемы к задаче 1 (продолжение).

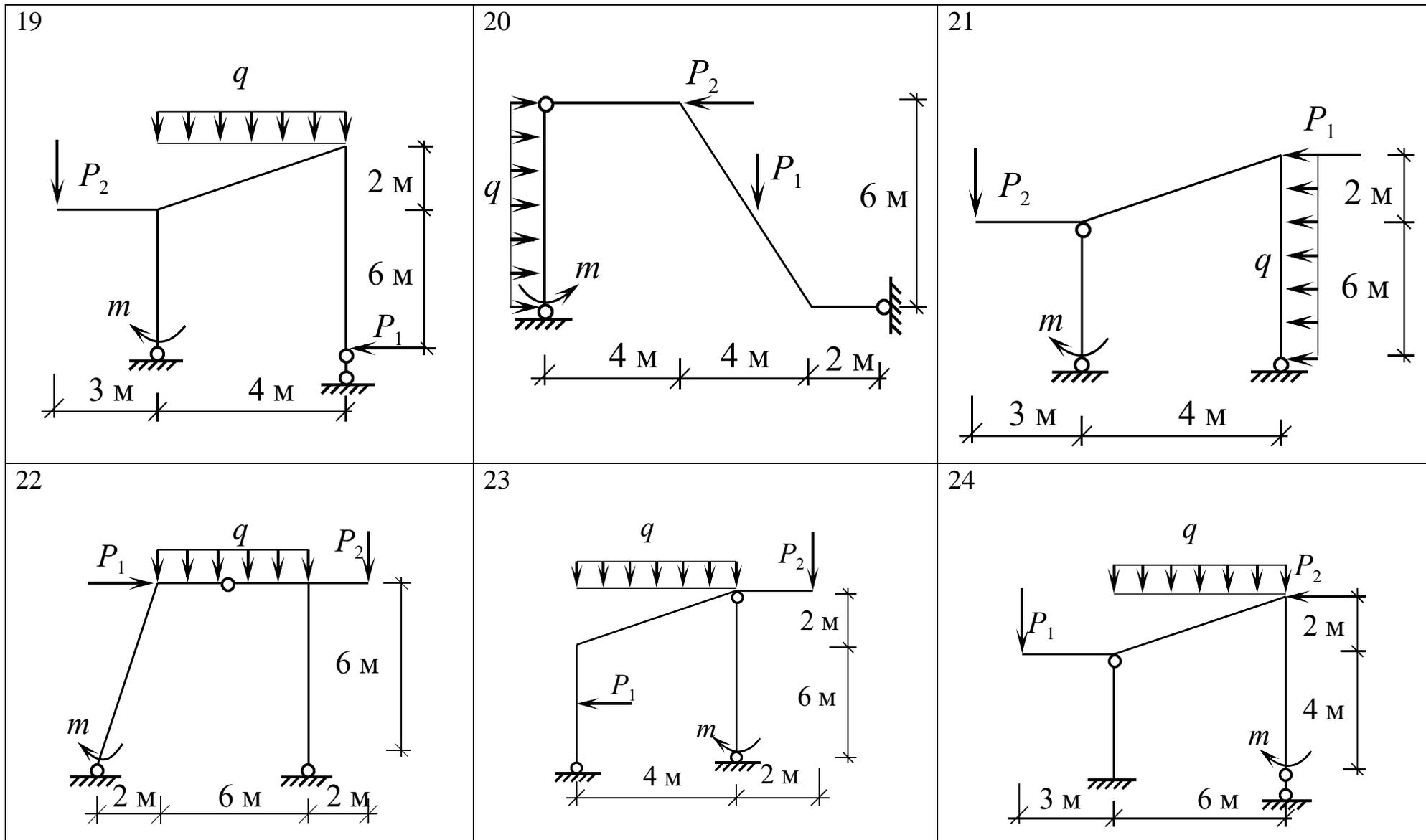


Рисунок 1. Расчетные схемы к задаче 1 (продолжение).

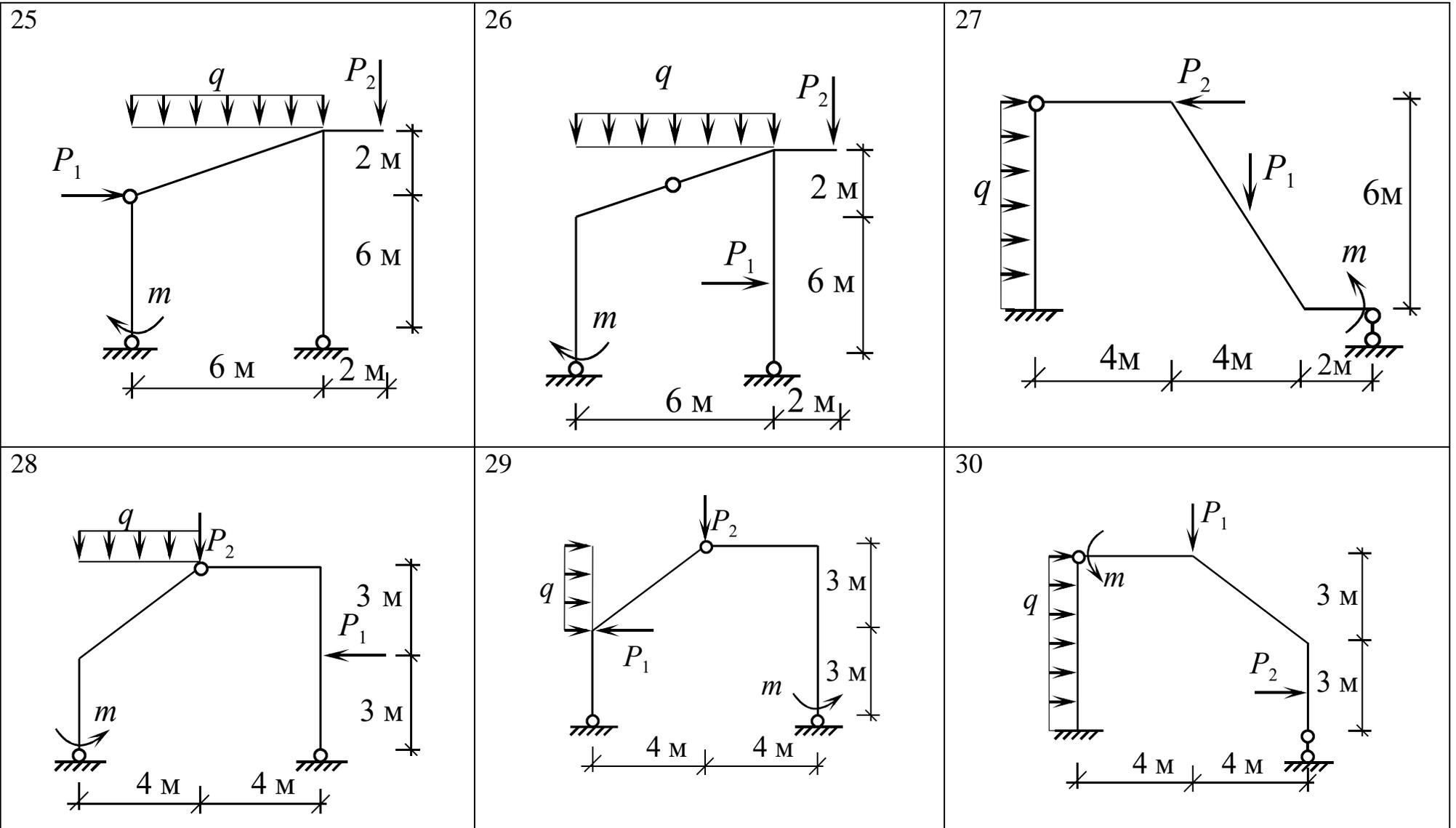


Рисунок 1. Расчетные схемы к задаче 1 (окончание).

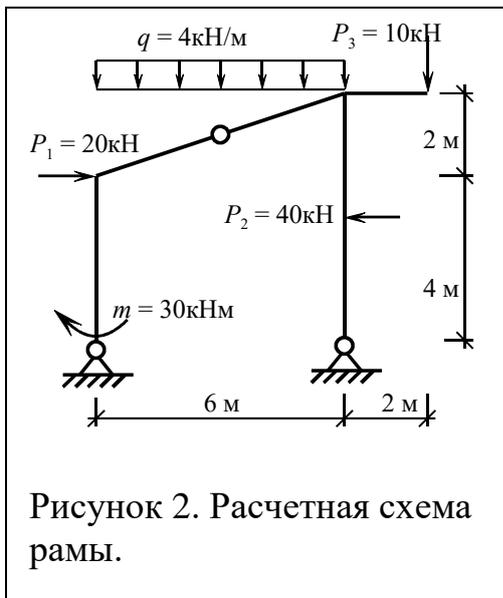


Рисунок 2. Расчетная схема рамы.

### Пример решения

Рассмотрим раму, показанную на рисунке 2. Найдем опорные реакции (рисунок 3).

Для этого запишем уравнения равновесия рамы:

$$\sum M_A = 0$$

$$V_B \cdot 6 + 40 \cdot 3 - 20 \cdot 4 - 4 \cdot 6 \cdot 3 - 30 - 10 \cdot 8 = 0$$

$$V_B = \frac{-40 \cdot 3 + 20 \cdot 4 + 4 \cdot 6 \cdot 3 + 30 + 10 \cdot 8}{6} = 23,67 \text{ кН}$$

$$\sum M_B = 0$$

$$V_A \cdot 6 - 40 \cdot 3 + 20 \cdot 4 - 4 \cdot 6 \cdot 3 + 30 + 10 \cdot 2 = 0$$

$$V_A = \frac{40 \cdot 3 - 20 \cdot 4 + 4 \cdot 6 \cdot 3 - 30 - 10 \cdot 2}{6} = 10,33 \text{ кН}$$

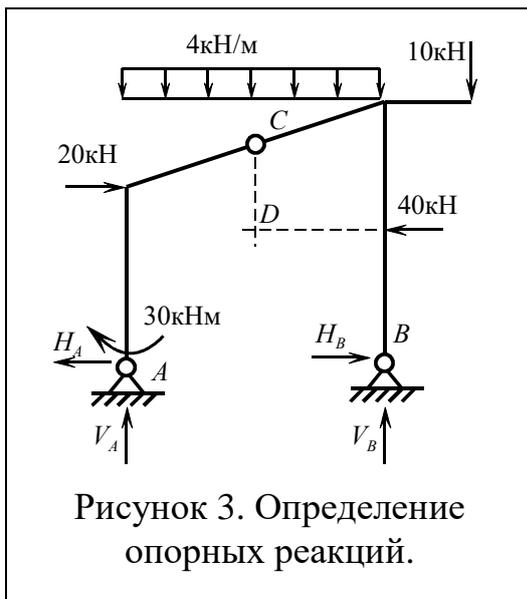


Рисунок 3. Определение опорных реакций.

$$\sum M_C^{IP} = 0$$

$$H_B \cdot 5 + 23,67 \cdot 3 - 4 \cdot 3 \cdot 1,5 - 40 \cdot 2 - 10 \cdot 5 = 0$$

$$H_B = \frac{-23,67 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5 + 40 \cdot 2 + 10 \cdot 5}{5} = 15,4 \text{ кН}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$H_A - 15,4 - 20 + 40 = 0$$

$$H_A = 15,4 + 20 - 40 = -4,6 \text{ кН}$$

Отрицательное значение реакции  $H_A$  означает, что ее направление следует изменить на противоположное.

Для проверки правильности вычисления опорных реакций запишем сумму моментов относительно точки D:

$$\sum M_D = 30 + 20 \cdot 1 - 4,6 \cdot 3 - 15,4 \cdot 3 - 23,67 \cdot 3 + 10,33 \cdot 3 + 10 \cdot 5 =$$

$$= 130,99 - 131,01 = -0,02 \approx 0$$

Найденные реакции показаны на рисунке 4. После определения опорных реакций найдем изгибающий момент, поперечную и продольную силы на

каждом участке рамы. Границами участков являются точки приложения сосредоточенных сил и моментов, начало и конец распределенной нагрузки и узлы (рисунок 4). Правила знаков для внутренних усилий:

- изгибающий момент на горизонтальных и наклонных стержнях положителен, если растягиваются нижние, а на вертикальных – правые волокна;
- поперечная сила положительна, если отброшенную часть вращает по ходу часовой стрелки;
- продольная сила положительна, если она растягивает стержень.

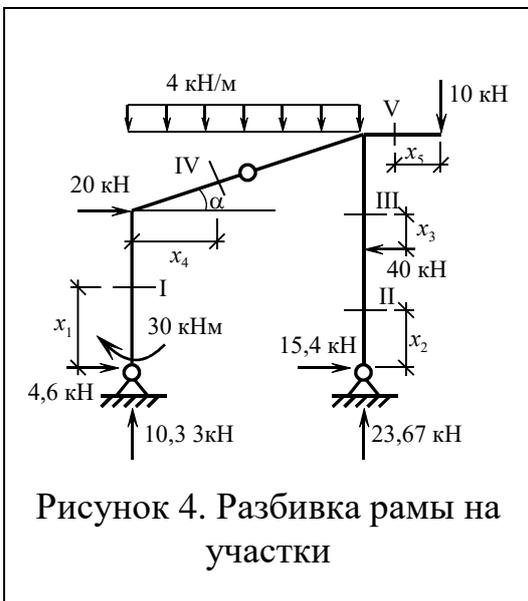


Рисунок 4. Разбивка рамы на участки

Участок I. Рассматриваем нижнюю часть.  $0 \leq x_1 \leq 4$  м

$$M(x) = 30 - 4,6 \cdot x_1, \quad Q(x) = -4,6 \text{ кН},$$

$$N(x) = -10,33 \text{ кН}$$

Моменты на границе участка:

$$M(0) = 30 \text{ кНм},$$

$$M(4) = 30 - 4,6 \cdot 4 = 11,6 \text{ кНм}$$

Участок II. Рассматриваем нижнюю часть.  $0 \leq x_2 \leq 3$  м

$$M(x) = -15,4 \cdot x_2, \quad Q(x) = -15,4 \text{ кН}, \quad N(x) = -23,67 \text{ кН}$$

Моменты на границе участка:

$$M(0) = 0,$$

$$M(3) = -15,4 \cdot 3 = -46,2 \text{ кНм}$$

Участок III. Рассматриваем нижнюю часть.  $0 \leq x_3 \leq 3$  м

$$M(x) = -15,4 \cdot (x_3 + 3) + 40 \cdot x_3, \quad Q(x) = -15,4 + 40 = 24,6 \text{ кН}, \quad N(x) = -23,67 \text{ кН}$$

Моменты на границе участка:

$$M(0) = -15,4 \cdot (0 + 3) + 40 \cdot 0 = -46,2 \text{ кНм},$$

$$M(3) = -15,4 \cdot (3 + 3) + 40 \cdot 3 = 27,6 \text{ кНм}$$

Участок IV. Рассматриваем левую часть.  $0 \leq x_4 \leq 6$  м

$$M(x) = 10,33 \cdot x_4 - 4 \cdot x_4 \cdot \frac{x_4}{2} - 20 \cdot x_4 \cdot \operatorname{tg} \alpha - 4,6 \cdot (4 + x_4 \cdot \operatorname{tg} \alpha) + 30,$$

$$Q(x) = 10,33 \cdot \cos \alpha - 4 \cdot x_4 \cdot \cos \alpha - 20 \cdot \sin \alpha - 4,6 \cdot \sin \alpha,$$

$$N(x) = -10,33 \cdot \sin \alpha + 4 \cdot x_4 \cdot \sin \alpha - 20 \cdot \cos \alpha - 4,6 \cdot \cos \alpha$$

Найдем тригонометрические функции, входящие в выражения для усилий на участке IV:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{6} = 0,333, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,333^2}} = 0,949,$$

$$\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha = 0,333 \cdot 0,949 = 0,316.$$

Вычислим усилия на границе участка, а изгибающий момент еще и в середине участка:

$$M(0) = -4,6 \cdot 4 + 30 = 11,6 \text{ кНм},$$

$$Q(0) = 10,33 \cdot 0,949 - 20 \cdot 0,316 - 4,6 \cdot 0,316 = 2,03 \text{ кН},$$

$$N(0) = -10,33 \cdot 0,316 - 20 \cdot 0,949 - 4,6 \cdot 0,949 = -26,61 \text{ кН}$$

$$M(6) = 10,33 \cdot 6 - 4 \cdot 6 \cdot \frac{6}{2} - 20 \cdot 6 \cdot \operatorname{tg} \alpha - 4,6 \cdot (4 + 6 \cdot \operatorname{tg} \alpha) + 30 = -47,57 \text{ кНм},$$

$$Q(6) = 10,33 \cdot \cos \alpha - 4 \cdot 6 \cdot \cos \alpha - 20 \cdot \sin \alpha - 4,6 \cdot \sin \alpha = -20,75 \text{ кН},$$

$$N(6) = -10,33 \cdot \sin \alpha + 4 \cdot 6 \cdot \sin \alpha - 20 \cdot \cos \alpha - 4,6 \cdot \cos \alpha = -19,03 \text{ кН}$$

$$M(3) = 10,33 \cdot 3 - 4 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} - 20 \cdot 3 \cdot \operatorname{tg} \alpha - 4,6 \cdot (4 + 3 \cdot \operatorname{tg} \alpha) + 30 = 0$$

Участок V. Рассматриваем правую часть.  $0 \leq x_5 \leq 2$  м

$$M(x) = -10 \cdot x_5,$$

$$Q(x) = 10 \text{ кН}, \quad N(x) = 0$$

$$M(0) = 0, \quad M(2) = -10 \cdot 2 = -20 \text{ кНм}$$

По полученным данным построим эпюры  $M$ ,  $Q$  и  $N$  (рисунок 5). Для проверки правильности построения эпюр вырежем узлы и убедимся в их равновесии (рисунок 6).

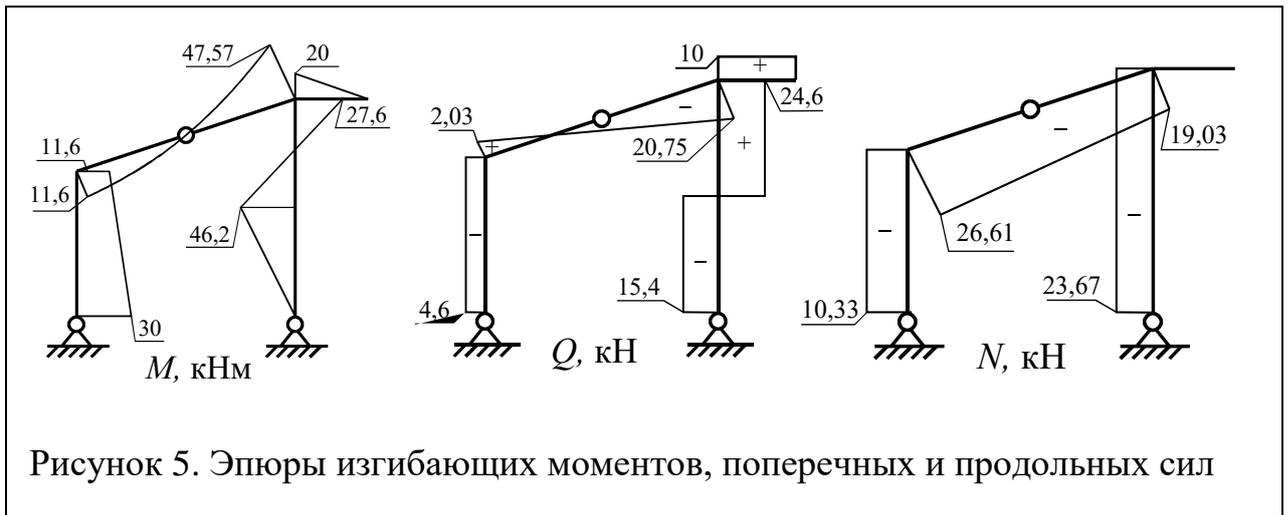


Рисунок 5. Эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил

Для левого узла получаем:

$$\sum M = 11,6 - 11,6 = 0,$$

$$\sum F_x = 20 + 4,6 - 26,61 \cdot \cos \alpha + 2,03 \cdot \sin \alpha = 25,24 - 25,25 = -0,01 \approx 0$$

$$\sum F_y = 10,33 - 26,61 \cdot \sin \alpha - 2,03 \cdot \cos \alpha = 10,33 - 10,33 = 0,01 \approx 0.$$

Для правого узла:

$$\sum M = 47,57 - 27,6 - 20 = 47,57 - 47,6 = -0,03 \approx 0,$$

$$\sum F_x = 19,03 \cdot \cos \alpha + 20,75 \cdot \sin \alpha - 24,6 = 24,62 - 24,6 = 0,02 \approx 0,$$

$$\sum F_y = 19,03 \cdot \sin \alpha - 20,75 \cdot \cos \alpha + 23,67 - 10 = 29,68 - 29,69 = -0,01 \approx 0.$$

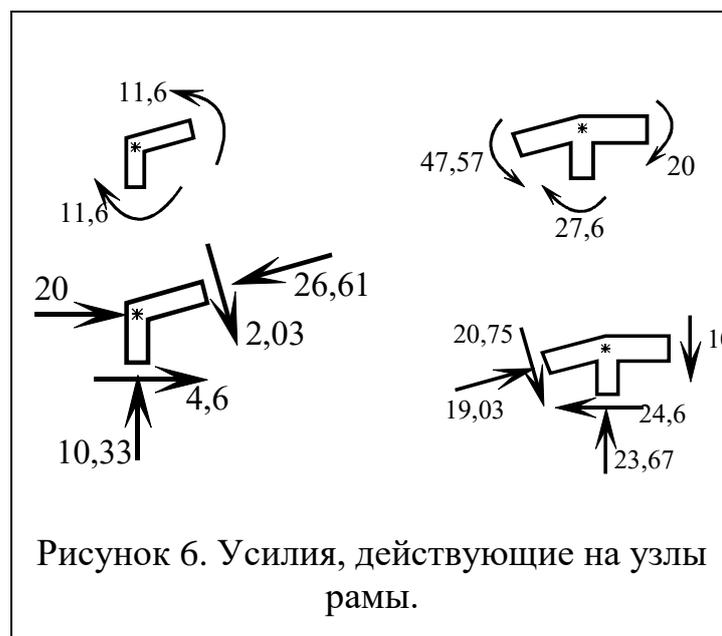


Рисунок 6. Усилия, действующие на узлы рамы.

**Задача 2.** Расчет статически определимой фермы.

В указанных стержнях фермы вычислить усилия от заданной нагрузки.

Исходные данные принять по таблице 2, расчетная схема выбирается по рисунку 7.

Таблица 2

Исходные данные к задаче 2.

Алфавит	$P_1$ , кН	$P_2$ , кН	$P_3$ , кН	$P_4$ , кН	Расчетные стержни				
					Схемы 1-30			Схемы 1-5, 11-15, 21-25	
а б в	10	10	10	10	2'-3'	4-5	2-2'	2-3'	4-5'
г д е	15	15	15	15	3'-4'	5-6	3-3'	3-4'	5-6'
ж з и й	20	20	20	20	4'-5'	2-3	4-4'	4'-5	2'-3
к л м	25	25	25	25	5'-6'	3-4	5-5'	5'-6	3'-4
н о п	30	30	30	30	2'-3'	4-5	6-6'	2-3'	4-5'
р с т	35	35	35	35	3'-4'	5-6	2-2'	3-4'	5-6'
у ф х	40	40	40	40	4'-5'	2-3	3-3'	4'-5	2'-3
ц ч ш	45	45	45	45	5'-6'	3-4	4-4'	5'-6	3'-4
щ ь ы ь	50	50	50	50	2'-3'	4-5	5-5'	2-3'	4-5'
э ю я	60	60	60	60	3'-4'	5-6	6-6'	3-4'	5-6'

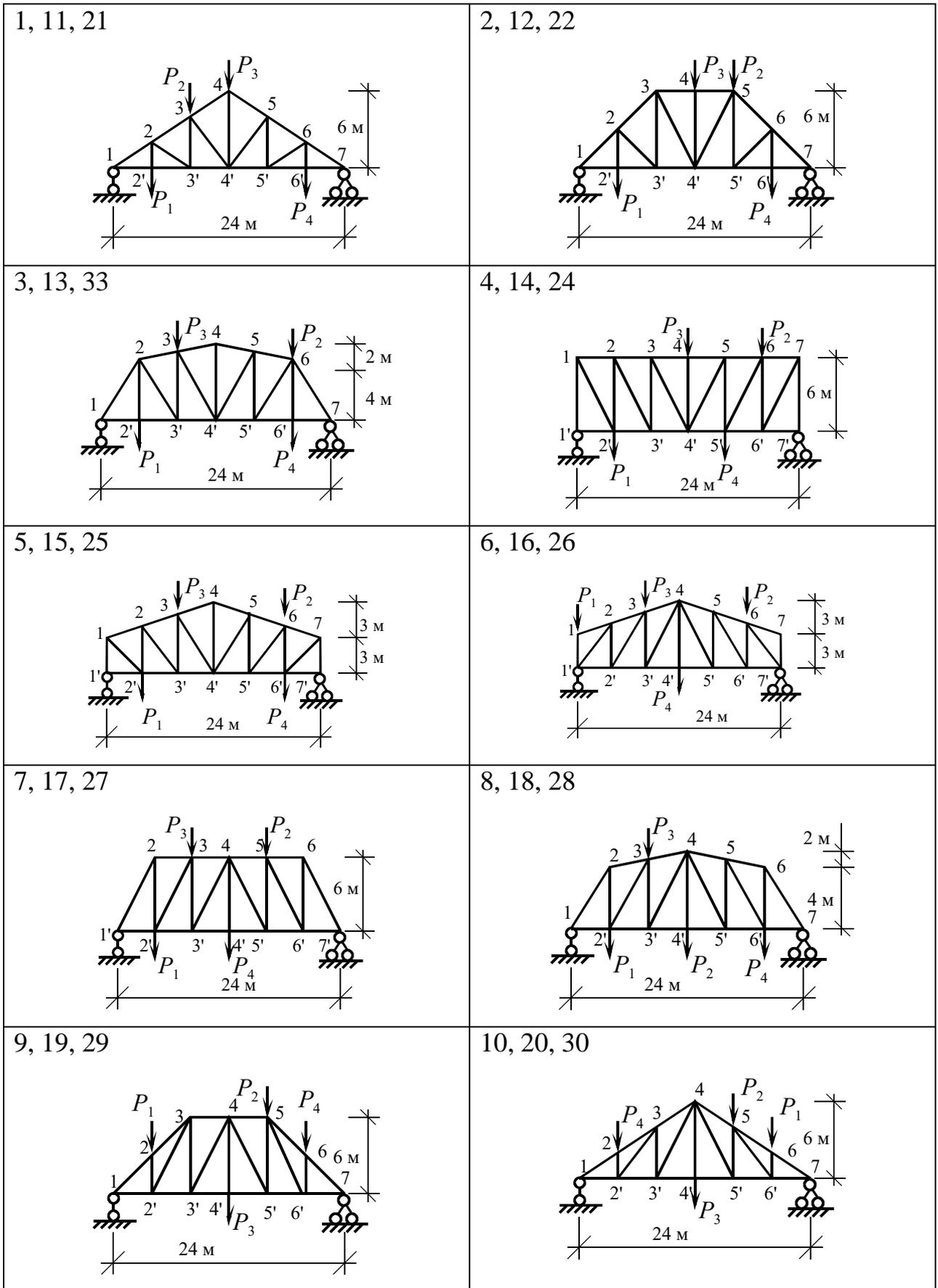
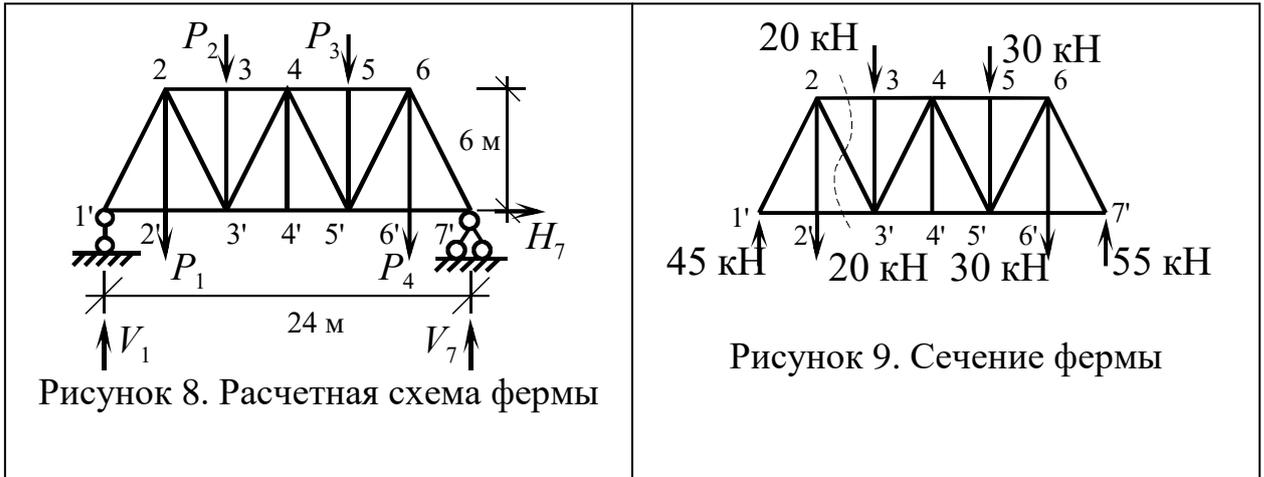


Рисунок 7. Расчетные схемы к задаче 2.

## Пример решения



Рассмотрим ферму, показанную на рисунке 8. Величины внешних сил  $P_1 = P_2 = 20 \text{ кН}$ ,  $P_3 = P_4 = 30 \text{ кН}$ . Найдем опорные реакции:

$$\sum M_{1'} = V_7 \cdot 24 - P_1 \cdot 4 - P_2 \cdot 8 - P_3 \cdot 16 - P_4 \cdot 20 = 0,$$

$$V_7 = \frac{20 \cdot 4 + 20 \cdot 8 + 30 \cdot 16 + 30 \cdot 20}{24} = 55 \text{ кН},$$

$$\sum M_{7'} = V_1 \cdot 24 - P_1 \cdot 20 - P_2 \cdot 16 - P_3 \cdot 8 - P_4 \cdot 4 = 0,$$

$$V_1 = \frac{20 \cdot 20 + 20 \cdot 16 + 30 \cdot 8 + 30 \cdot 4}{24} = 45 \text{ кН}.$$

$$\sum F_x = H_7 = 0.$$

Проверим опорные реакции:

$$\sum F_y = V_1 + V_7 - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 = 45 + 55 - 20 - 20 - 30 - 30 = 100 - 100 = 0$$



Рисунок 10. Силы, действующие на левую часть фермы

Найдем усилия в стержнях 2'-3', 2-3', 2-3, 6-6' и 1'-2. Для определения усилий в стержнях 2'-3', 2-3' и 2-3 проведем сечение, как показано на рисунке 9, и рассмотрим равновесие левой части (рисунок 10). Для определения усилия  $N_{2-3}$  запишем сумму моментов относительно точки 3':

$$\sum M_{3'} = N_{2-3} \cdot 6 + V_1 \cdot 8 - P_1 \cdot 4 = 0,$$

$$N_{2-3} = \frac{-45 \cdot 8 + 20 \cdot 4}{6} = -46,7 \text{ кН}.$$

Чтобы найти усилие  $N_{2-3}$ , используем сумму моментов относительно точки 2:

$$\sum M_2 = N_{2-3} \cdot 6 - V_1 \cdot 4 = 0,$$

$$N_{2-3} = \frac{45 \cdot 4}{6} = 30 \text{ кН}.$$

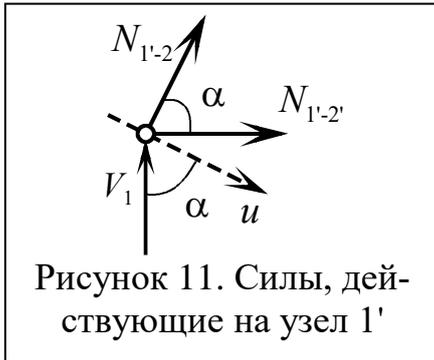
Для вычисления усилия  $N_{2-3}$  используем сумму проекций на вертикальную ось:

$$\sum F_y = N_{2-3} \sin \beta - V_1 = 0.$$

Чтобы найти синус угла  $\beta$  рассмотрим прямоугольный треугольник 2-3-3'. В этом треугольнике  $\text{tg } \beta = 6/4 = 1,5$ ;  $\sin \beta = \frac{\text{tg } \beta}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \beta}} = \frac{1,5}{\sqrt{1 + 1,5^2}} = 0,832$ .

$$N_{2-3} = \frac{45}{0,832} = 54,1 \text{ кН}.$$

Чтобы получить усилие  $N_{1-2}$ , вырезаем узел 1' (рисунок 11), и записываем сумму проекций на ось  $u$ , перпендикулярную усилию:  $N_{1-2}$

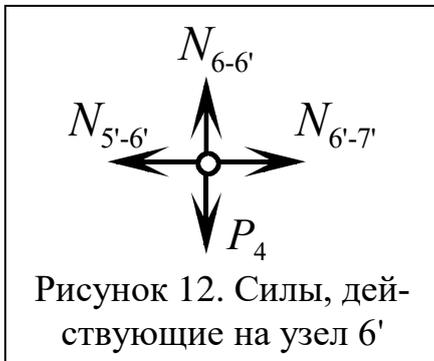


$$\sum F_u = N_{1-2} \cdot \sin \alpha - V_1 \cdot \cos \alpha = 0,$$

$$N_{1-2} = \frac{V_1 \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{V_1}{\text{tg } \alpha}.$$

Из треугольника 1'-2'-2 (рисунок 8) найдем  $\text{tg } \alpha = 6/4 = 1,5$ . Тогда

$$N_{1-2} = \frac{45}{1,5} = 30 \text{ кН}.$$



Для того, чтобы получить усилие  $N_{6-6'}$ , вырежем узел 6' (рисунок 12), и запишем сумму проекций на вертикальную ось:

$$\sum F_y = N_{6-6'} - P_4 = 0,$$

$$N_{6-6'} = P_4 = 30 \text{ кН}.$$

**Задача 3.** Построение эпюр внутренних усилий в трехшарнирной арке.

Требуется:

1. Определить опорные реакции и построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил во вспомогательной балке. Вычислить распор.
2. Вычислить изгибающие моменты, поперечные и продольные силы в расчетных сечениях арки (по указанию преподавателя) и построить эпюры внутренних усилий.

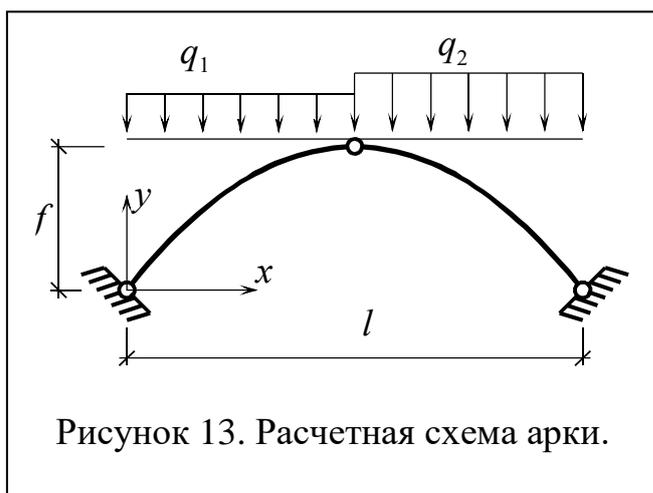


Рисунок 13. Расчетная схема арки.

Исходные данные принять по таблице 3, расчетная схема показана на рисунке 13.

Уравнение оси арки принять

$$y = 4f \left( \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right)$$

Таблица 3

Исходные данные к задаче 3.

Алфавит	$q_1/ q_2,$ кН/м	$l, \text{ м}$	$f/l$	$a_k/l$ (для задачи №9)
а б в	10/0	10	0,2	0,2
г д е	15/0	12	0,25	0,3
ж з и й	20/0	15	0,3	0,4
к л м	25/0	18	0,35	0,6
н о п	30/0	20	0,4	0,7
р с т	0/10	25	0,2	0,8
у ф х	0/15	30	0,25	0,2
ц ч ш	0/20	35	0,3	0,3
щ ь ы ь	0/25	40	0,35	0,4
э ю я	0/30	45	0,4	0,6



### Пример

Расчетная схема арки с размерами и нагрузкой показана на рисунке 14. Очертание оси арки примем по квадратной параболе, заданной уравнением

$$y = 4f \left( \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right).$$

Для построения эпюр разделим пролет арки на 6 частей, как показано на рисунке 14. Построим эпюры изгибающих моментов и поперечных сил во вспомогательной балке пролетом 30 м, нагруженной так же, как и арка (рисунок 15). Найдем опорные реакции:

$$\sum M_A = 0, \quad V_B \cdot l - \frac{ql}{2} \cdot \frac{3l}{4} = 0, \quad V_B = \frac{3ql}{8} = \frac{3 \cdot 8 \cdot 30}{8} = 90 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0, \quad V_A \cdot l - \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{4} = 0, \quad V_A = \frac{ql}{8} = \frac{8 \cdot 30}{8} = 30 \text{ кН}.$$

Проверка реакций:

$$\sum F_y = V_A + V_B - q \frac{l}{2} = 30 + 90 - 8 \cdot 15 = 120 - 120 = 0.$$

Далее запишем уравнения изгибающих моментов и поперечных сил в балке отдельно на каждом из двух участков.

Участок 1.  $0 \leq x_1 \leq 15 \text{ м}$ .

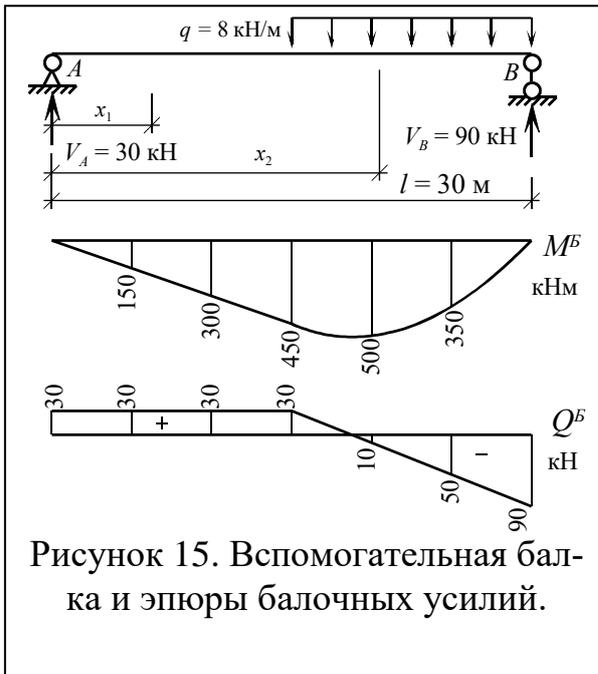
$$M^B(x) = V_A x_1 = 30 x_1,$$

$$Q^B(x) = V_A = 30 \text{ кН}.$$

Участок 2.  $15 \leq x_2 \leq 30 \text{ м}$ .

$$M^B(x) = V_A x_2 - \frac{q(x_2 - 15)^2}{2} = 30 x_2 - \frac{8 \cdot (x_2 - 15)^2}{2},$$

$$Q^B(x) = V_A - q x_2 = 30 - 8(x_2 - 15).$$



Вычисленные по этим выражениям ординаты эпюр приведены в таблице 4, а эпюры показаны на рисунке 15.

Вычислим распор  $H$  в арке:

$$H = \frac{M_C^B}{f} = \frac{450}{10} = 45 \text{ кН}.$$

Здесь  $M_C^B$  - балочный момент в сечении под замковым шарниром.

Переход от балочных усилий к арочным дается формулами

$$M^{AP} = M^B - H \cdot y,$$

$$Q^{AP} = Q^B \cdot \cos \varphi - H \cdot \sin \varphi,$$

$$N^{AP} = -Q^B \cdot \sin \varphi - H \cdot \cos \varphi.$$

В этих формулах  $y = 4f \left( \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right)$ ,  $\varphi$  - угол между касательной к оси арки

и осью  $Ox$ . Его тангенс равен  $\text{tg } \varphi = y' = 4f \left( \frac{1}{l} - \frac{2x}{l^2} \right)$ . Если известен тангенс

угла, то его косинус и синус могут быть найдены по формулам

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \varphi}}, \quad \sin \varphi = \text{tg } \varphi \cdot \cos \varphi.$$

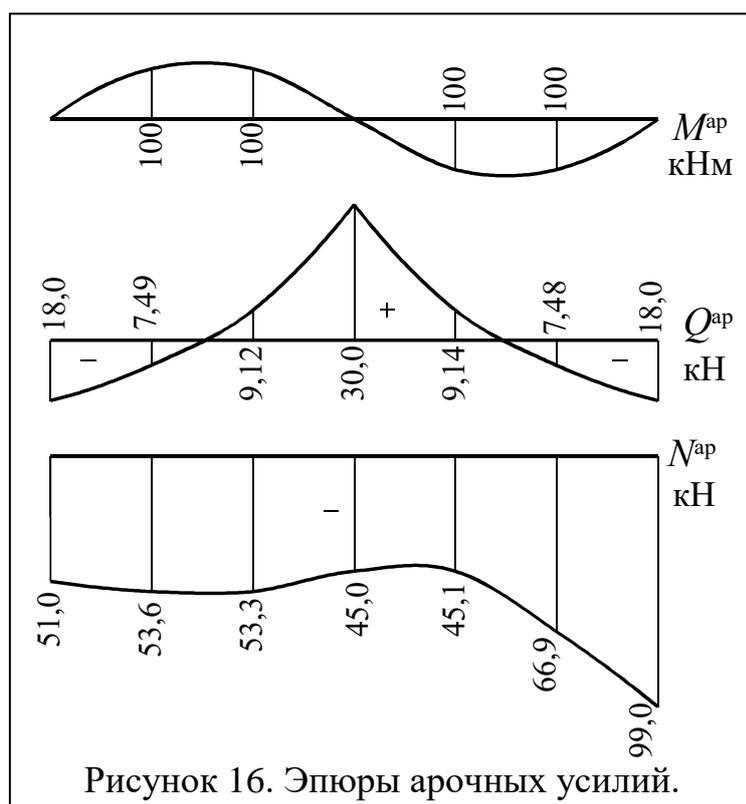
Как видно распор  $H$  существенно уменьшает изгибающий момент и поперечную силу в арке, и вызывает значительную сжимающую продольную силу.

Величины, необходимые для построения эпюр усилий в арке приведены в таблице 4, а эпюры показаны на рисунке 16.

Таблица 4.

Вычисление балочных и арочных усилий.

$x, \text{ м}$	$y, \text{ м}$	$M^B, \text{ кНм}$	$Q^B, \text{ кН}$	$\text{tg } \varphi$	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$	$M^{AP}, \text{ кНм}$	$Q^{AP}, \text{ кН}$	$N^{AP}, \text{ кН}$
0	0	0	30	1,333	0,600	0,800	0	-18,0	-51,0
5	5,56	150	30	0,889	0,748	0,665	-100	-7,49	-53,6
10	8,89	300	30	0,445	0,913	0,406	-100	9,12	-53,3
15	10	450	30	0	1	0	0	30	-45,0
20	8,89	500	-10	-0,445	0,913	-0,406	100	9,14	-45,1
25	5,56	350	-50	-0,889	0,748	-0,665	100	-7,48	-66,9
30	0	0	-90	-1,333	0,600	-0,800	0	-18,0	-99,0



**Задача 4.** Построение огибающих эпюр в балке.

Требуется:

1. Построить линии влияния изгибающих моментов и поперечных сил в расчетных сечениях.
2. Загрузить линии влияния заданной подвижной нагрузкой (система сил  $P_1 P_2 P_2 P_1$ ).
3. Загрузить линии влияния постоянной нагрузкой  $q$ .
4. Построить огибающие эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

Исходные данные принять по таблице 5, расчетная схема показана на рисунке 17. Принять расстояния между силами  $a = 0,1l$  и  $b = 0,2l$ .

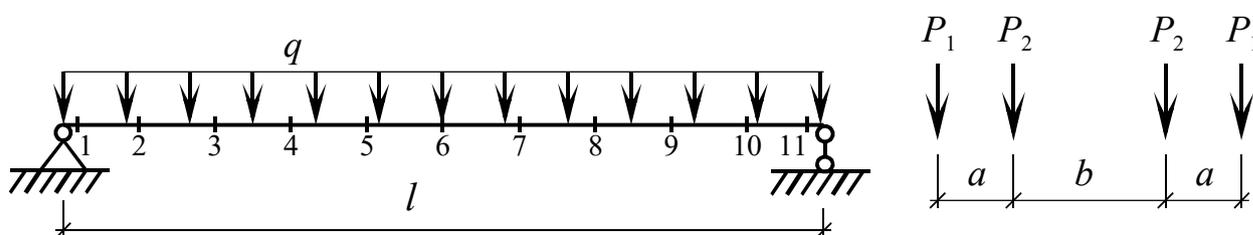


Рисунок 17. Расчетная схема к задаче 4.

Таблица 5.

Исходные данные к задаче 4.

Алфавит	$q$ , кН/м	$P_1/P_2$ , кН	$l$ , м
а б в	2	50/60	10
г д е	3	45/50	12
ж з и й	4	45/60	15
к л м	5	50/80	18
н о п	6	50/75	20
р с т	2	50/60	24
у ф х	3	45/50	28
ц ч ш	4	45/60	30
щ ь ы ь	5	50/80	36
э ю я	6	50/75	40

## Пример



Рассмотрим балку, показанную на рисунке 18. Балка нагружена равномерно распределенной нагрузкой – собственным весом  $q = 5 \text{ кН/м}$  и временной нагрузкой – системой сил, так же показанной на рисунке 18. Для временной нагрузки примем  $P_1 = P_4 = 50 \text{ кН}$  и  $P_2 = P_3 = 60 \text{ кН}$ , таким образом равнодействующая равна  $R = 50 + 60 + 60 + 50 = 220 \text{ кН}$ . На балке отметим 11 сечений с шагом, равным 2 м. Для каждого сечения вычислим изгибающий момент и поперечную силу от воздействия заданных постоянной и временной нагрузок отдельно. При вычислении любого усилия от подвижной нагрузки следует сначала построить линию влияния этого усилия.

В сечении №1 изгибающий момент равен нулю при любом положении нагрузки, так как в этом сечении расположена шарнирная опора.

Вычислим изгибающие моменты в сечении №2 от подвижной нагрузки. Построим линию влияния момента в этом сечении (рисунок 19). При этом используем готовые линии влияния, приведенные в приложении А. Для того чтобы получить самое невыгодное положение системы сил, используем критерий экстремального положения нагрузки для треугольной линии влияния:

$$\sum P_{ЛЕВ} \leq \frac{a_K}{l} \sum P,$$

$$\sum P_{ЛЕВ} + P_{КР} \geq \frac{a_K}{l} \sum P.$$

Здесь  $P_{КР}$  – сила, стоящая над вершиной треугольной линии влияния,  $a_K$  – расстояние от левой нулевой ординатой до вершины линии влияния,  $l$  –

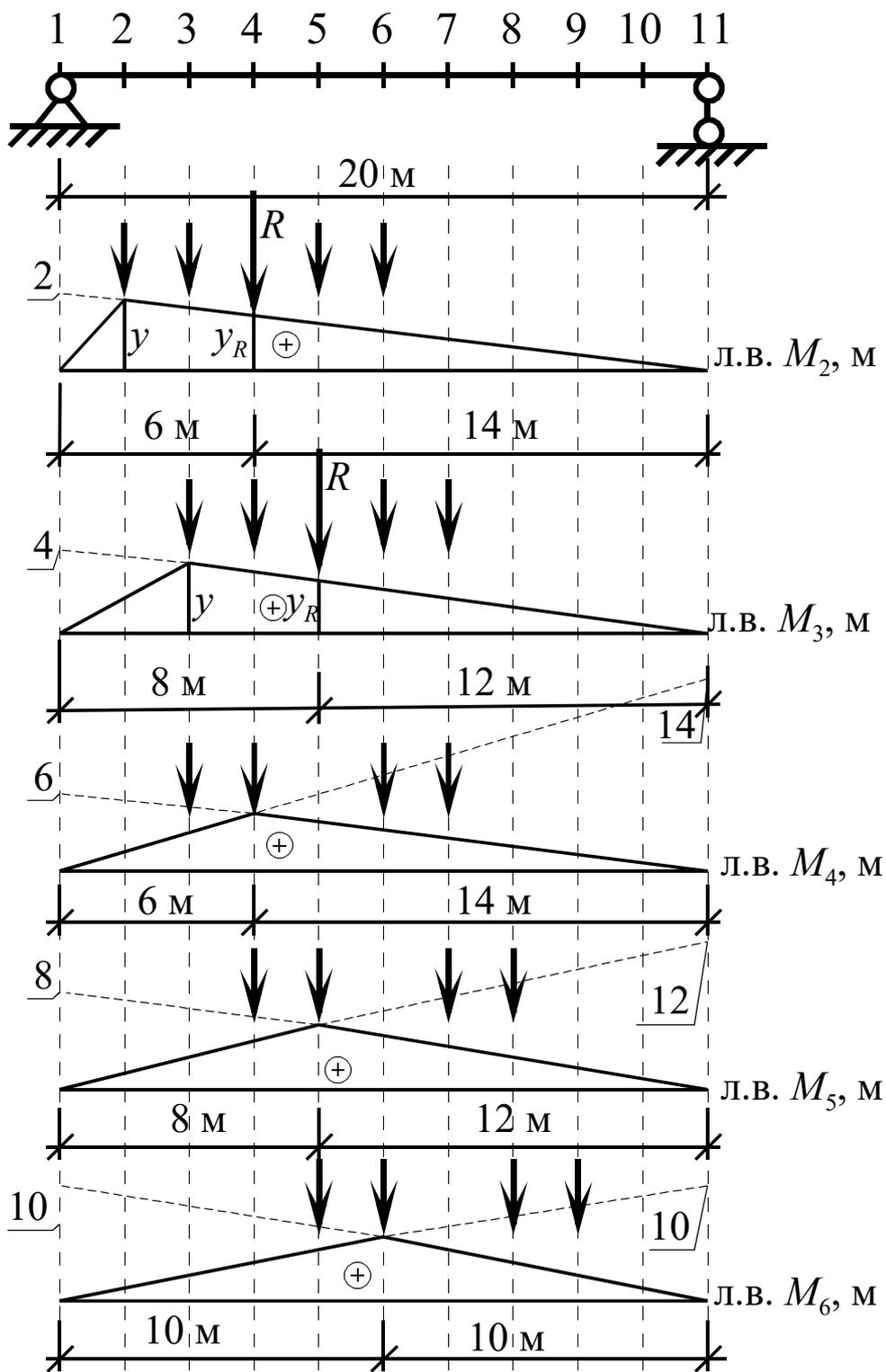


Рисунок 19. Линии влияния изгибающих моментов и их загрузка.

расстояние между нулевыми ординатами на линии влияния,  $\sum P_{ЛЕВ}$  – сумма сил, расположенных слева от критического груза.

Правая часть неравенств критерия  $\frac{a_K}{l} \sum P = \frac{2}{20} \cdot 220 = 22 \text{ кН}$ . Обоим неравенствам критерия удовлетворяет сила  $P_1$ . Ее располагаем над вершиной линии влияния, а остальные в соответствии со схемой временной нагрузки (см. рисунок 19). Так как система сил расположена над одной прямой ветвью линии влияния, то ее можно заменить равнодействующей. Найдем наибольший положительный изгибающий момент:

$$M_2^{HP} = R \cdot y_R = 220 \cdot \frac{2}{20} \cdot 14 = 308 \text{ кНм},$$

где  $y_R$  – ордината линии влияния под равнодействующей.

Так как на линии влияния  $M_2$  нет отрицательных ординат, то наибольший отрицательный изгибающий момент  $M_2^{HO} = 0$ . Найдем момент от постоянной нагрузки:

$$M_2^q = q \cdot \omega_{лв} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot \frac{2}{20} \cdot 18 = 90 \text{ кНм},$$

где  $\omega_{лв}$  – площадь линии влияния

Получим расчетные максимальный и минимальный изгибающие моменты:

$$M_2^{\max} = M_2^{HP} + M_2^q = 308 + 90 = 398 \text{ кНм},$$

$$M_2^{\min} = M_2^{HO} + M_2^q = 0 + 90 = 90 \text{ кНм}.$$

Далее рассмотрим сечение №3. Для него  $\frac{a_K}{l} \sum P = \frac{4}{20} \cdot 220 = 44 \text{ кН}$ , и над вершиной следует поместить силу  $P_1$ . Вычислим изгибающие моменты в этом сечении:

$$M_3^{HP} = R \cdot y_R = 220 \cdot \frac{4}{20} \cdot 12 = 528 \text{ кНм},$$

$$M_3^{HO} = 0,$$

$$M_3^q = q \cdot \omega_{лв} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot \frac{4}{20} \cdot 16 = 160 \text{ кНм},$$

$$M_3^{\max} = M_3^{HP} + M_3^q = 528 + 160 = 688 \text{ кНм},$$

$$M_3^{\min} = M_3^{HO} + M_3^q = 0 + 160 = 160 \text{ кНм.}$$

Для сечения №4 получим  $\frac{a_K}{l} \sum P = \frac{6}{20} \cdot 220 = 66 \text{ кН}$ . Критерию удовлетворяет сила  $P_2$ . Теперь вся подвижная нагрузка не находится над прямолинейным участком линии влияния и заменить ее равнодействующей нельзя.

Найдем моменты: наибольший положительный, наибольший отрицательный, от постоянной нагрузки, максимальный и минимальный:

$$M_4^{HII} = \sum (P_i \cdot y_i) = 50 \cdot \frac{14}{20} \cdot 4 + 60 \cdot \frac{14}{20} \cdot 6 + 60 \cdot \frac{6}{20} \cdot 10 + 50 \cdot \frac{6}{20} \cdot 8 = 692 \text{ кНм,}$$

$$M_4^{HO} = 0,$$

$$M_4^q = q \cdot \omega_{\text{ле}} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot \frac{6}{20} \cdot 14 = 210 \text{ кНм,}$$

$$M_4^{\max} = M_4^{HII} + M_4^q = 692 + 210 = 902 \text{ кНм,}$$

$$M_4^{\min} = M_4^{HO} + M_4^q = 0 + 210 = 210 \text{ кНм.}$$

Для сечения №5 правая часть критерия  $\frac{a_K}{l} \sum P = \frac{8}{20} \cdot 220 = 88 \text{ кН}$ . Критерию удовлетворяет сила  $P_2$ . Аналогично сечению 4 вычислим изгибающие моменты:

$$M_5^{HII} = \sum (P_i \cdot y_i) = 50 \cdot \frac{12}{20} \cdot 6 + 60 \cdot \frac{12}{20} \cdot 8 + 60 \cdot \frac{8}{20} \cdot 8 + 50 \cdot \frac{8}{20} \cdot 6 = 780 \text{ кНм,}$$

$$M_5^{HO} = 0,$$

$$M_5^q = q \cdot \omega_{\text{ле}} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot \frac{8}{20} \cdot 12 = 240 \text{ кНм,}$$

$$M_5^{\max} = M_5^{HII} + M_5^q = 780 + 240 = 1020 \text{ кНм,}$$

$$M_5^{\min} = M_5^{HO} + M_5^q = 0 + 240 = 240 \text{ кНм.}$$

Для сечения №6 правая часть критерия  $\frac{a_K}{l} \sum P = \frac{10}{20} \cdot 220 = 110 \text{ кН}$ . Критерию удовлетворяют силы  $P_2$  и  $P_3$ . Это означает, что есть два положения системы сил, которые дают наибольший момент в сечении №6. В таких случаях

можно использовать любое из них. Расположим над вершиной линии влияния силу  $P_2$ .

Найдем изгибающие моменты:

$$M_6^{HII} = \sum(P_i \cdot y_i) = 50 \cdot \frac{10}{20} \cdot 8 + 60 \cdot \frac{10}{20} \cdot 10 + 60 \cdot \frac{10}{20} \cdot 6 + 50 \cdot \frac{10}{20} \cdot 4 = 780 \text{ кНм},$$

$$M_6^{HO} = 0,$$

$$M_6^q = q \cdot \omega_{\text{лев}} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot \frac{10}{20} \cdot 10 = 250 \text{ кНм},$$

$$M_6^{\max} = M_6^{HII} + M_6^q = 780 + 250 = 1030 \text{ кНм},$$

$$M_6^{\min} = M_6^{HO} + M_6^q = 0 + 240 = 250 \text{ кНм}.$$

Для сечений №№7-11 вычисления можно не выполнять. Так как схема балки и схема нагрузки симметричны, то  $M_1 = M_{11}$ ,  $M_2 = M_{10}$ , и т. д.

Вычислим абсолютный максимальный момент – самый большой из всех наибольших положительных от подвижной нагрузки. В большинстве случаев, когда все грузы одного порядка критический груз – ближайший к равнодействующей. Примем в качестве критического груза силу  $P_2$ . Сначала найдем положение сечения, в котором будет абсолютный максимальный момент:

$$x = \frac{l - c}{2} = \frac{20 - 2}{2} = 9 \text{ м}.$$

Здесь  $l$  – пролет балки,  $c$  – расстояние от равнодействующей до критического груза. Далее вычислим момент:

$$\text{abs max } M = \frac{R}{l} x^2 - \sum_{\text{лев}} P \cdot a = \frac{220}{20} \cdot 9^2 - 50 \cdot 2 = 791 \text{ кНм}.$$

Для этих же сечений найдем расчетные поперечные силы. В сечении №1 наибольшая положительная поперечная сила будет реализована, если заданная система сил целиком расположена над правой ветвью линии влияния (рисунок 20). При этом вся нагрузка расположена над прямым участком, следовательно, можно заменить ее равнодействующей:

$$Q_1^{III} = R \cdot y_R = 220 \cdot \frac{1}{20} \cdot 16 = 176 \text{ кН},$$

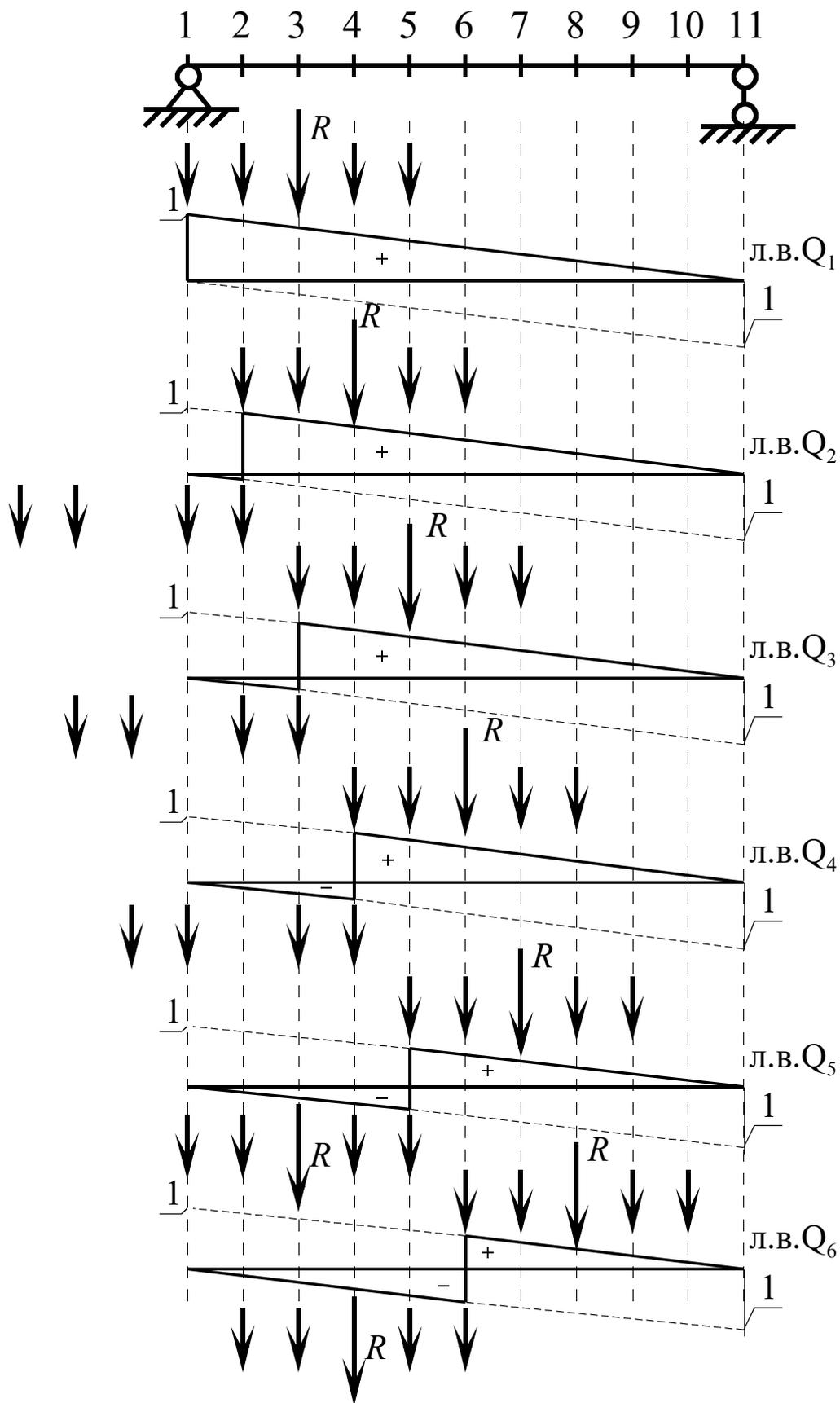


Рисунок 20. Линии влияния поперечных сил и их загрузение.

$$Q_1^{HO} = 0,$$

$$Q_1^q = q \cdot \omega_{лв} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 20 = 50 \text{ кН},$$

$$Q_1^{\max} = Q_1^{HP} + Q_1^q = 176 + 50 = 226 \text{ кН},$$

$$Q_1^{\min} = Q_1^{HO} + Q_1^q = 0 + 50 = 50 \text{ кН}.$$

Вычислим расчетные усилия в сечении №2. При вычислении наибольшей положительной поперечной силы заменим подвижную нагрузку равнодействующей. Наибольшая отрицательная поперечная сила нулю не равна, но так как вся нагрузка не располагается над одной прямой, то заменять ее равнодействующей нельзя.

$$Q_2^{HP} = R \cdot y_R = 220 \cdot \frac{1}{20} \cdot 14 = 154 \text{ кН},$$

$$Q_2^{HO} = \sum(P_i \cdot y_i) = -50 \cdot \frac{1}{20} \cdot 2 = -5 \text{ кН},$$

$$Q_2^q = q \cdot \omega_{лв} = 5 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20} \cdot 18 \cdot 18 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20} \cdot 2 \cdot 2 \right] = 40 \text{ кН},$$

$$Q_2^{\max} = Q_2^{HP} + Q_2^q = 154 + 40 = 194 \text{ кН},$$

$$Q_2^{\min} = Q_2^{HO} + Q_2^q = -5 + 40 = 35 \text{ кН}.$$

Аналогично для сечения №3:

$$Q_3^{HP} = R \cdot y_R = 220 \cdot \frac{1}{20} \cdot 12 = 132 \text{ кН},$$

$$Q_3^{HO} = \sum(P_i \cdot y_i) = -60 \cdot \frac{1}{20} \cdot 2 - 50 \cdot \frac{1}{20} \cdot 4 = -16 \text{ кН},$$

$$Q_3^q = q \cdot \omega_{лв} = 5 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20} \cdot 16 \cdot 16 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20} \cdot 4 \cdot 4 \right] = 30 \text{ кН},$$

$$Q_3^{\max} = Q_3^{HP} + Q_3^q = 132 + 30 = 162 \text{ кН},$$

$$Q_3^{\min} = Q_3^{HO} + Q_3^q = -16 + 30 = 14 \text{ кН}.$$

Для сечения №4:

$$Q_4^{HP} = R \cdot y_R = 220 \cdot \frac{1}{20} \cdot 10 = 110 \text{ кН},$$

$$Q_4^{HO} = \sum(P_i \cdot y_i) = -60 \cdot \frac{1}{20} \cdot 4 - 50 \cdot \frac{1}{20} \cdot 6 = -27 \text{ кН},$$

$$Q_4^q = q \cdot \omega_{\text{лс}} = 5 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20} \cdot 14 \cdot 14 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20} \cdot 6 \cdot 6 \right] = 20 \text{ кН},$$

$$Q_4^{\max} = Q_4^{HP} + Q_4^q = 110 + 20 = 130 \text{ кН},$$

$$Q_4^{\min} = Q_4^{HO} + Q_4^q = -27 + 20 = -7 \text{ кН}.$$

Для сечения №5 учтем, что как для наибольшей положительной, так и для наибольшей отрицательной поперечной силы, подвижная нагрузка расположена над прямолинейным участком линии влияния, и можно ее заменить равнодействующей:

$$Q_5^{HP} = R \cdot y_R = 220 \cdot \frac{1}{20} \cdot 8 = 88 \text{ кН},$$

$$Q_5^{HO} = R \cdot y_R^- = -220 \cdot \frac{1}{20} \cdot 4 = -44 \text{ кН},$$

$$Q_5^q = q \cdot \omega_{\text{лс}} = 5 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20} \cdot 12 \cdot 12 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20} \cdot 8 \cdot 8 \right] = 10 \text{ кН},$$

$$Q_5^{\max} = Q_5^{HP} + Q_5^q = 88 + 10 = 98 \text{ кН},$$

$$Q_5^{\min} = Q_5^{HO} + Q_5^q = -44 + 10 = -34 \text{ кН}.$$

Аналогично для сечения №6:

$$Q_6^{HP} = R \cdot y_R = 220 \cdot \frac{1}{20} \cdot 6 = 66 \text{ кН},$$

$$Q_6^{HO} = R \cdot y_R^- = -220 \cdot \frac{1}{20} \cdot 6 = -66 \text{ кН},$$

$$Q_6^q = q \cdot \omega_{\text{лс}} = 5 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20} \cdot 10 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20} \cdot 10 \cdot 10 \right] = 0,$$

$$Q_6^{\max} = Q_6^{HP} + Q_6^q = 66 + 0 = 66 \text{ кН},$$

$$Q_6^{\min} = Q_6^{HO} + Q_6^q = -66 + 0 = -66 \text{ кН}.$$

Как и при вычислении изгибающих моментов, для сечений №№7-11 вычисления можно не выполнять. В силу симметрии  $Q_1 = -Q_{11}$ ,  $Q_2 = -Q_{10}$ ,  $Q_3 = -Q_9$ , и т. д.

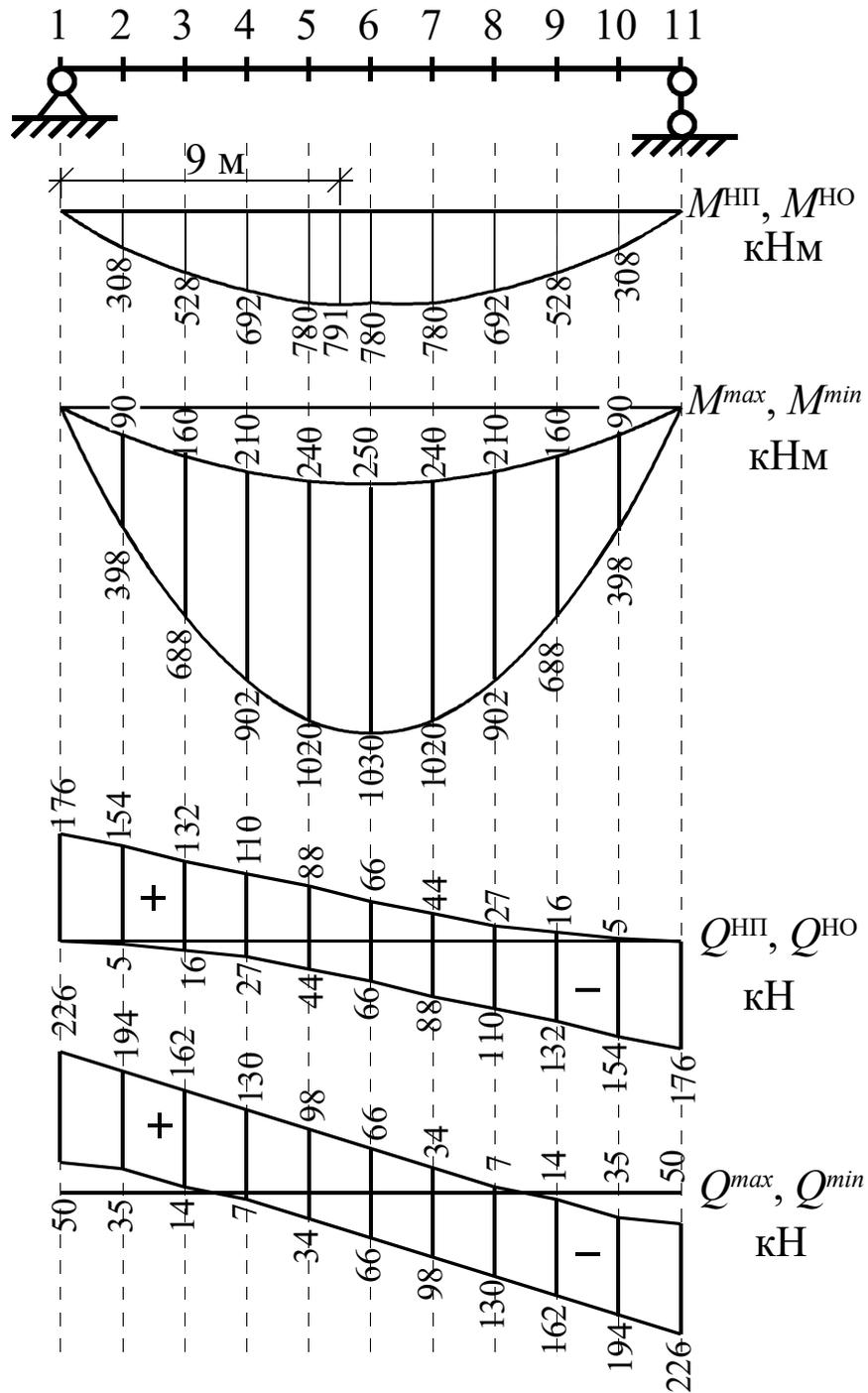


Рисунок 21. Огибающие эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

По полученным данным строим огибающие эпюры моментов и поперечных сил: наибольших положительных/отрицательных, максимальных/минимальных (рисунок 21).

**Задача 5.** Вычисление внутренних усилий в многопролетной шарнирной балке тремя способами.

Требуется:

1. Изобразить этажную схему и построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.
2. Вычислить усилия  $M$ ,  $Q$  в указанных сечениях и опорные реакции кинематическим способом.
3. Построить линии влияния тех же усилий и загрузить их заданной нагрузкой.

Исходные данные принять по таблице 6, расчетная схема выбирается по рисунку 22.

Таблица 6.

Исходные данные к задаче 5.

Алфавит	$q_1/q_2$ , кН/м	$P$ , кН	$l$ , м	Расчетные опор- ные реакции		Расчетные сечения	
				$R_1$	$R_2$		
а б в	2/0	5	2	$R_1$	$R_2$	1	3
г д е	3/0	10	3	$R_3$	$R_4$	2	4
ж з и й	4/0	15	4	$R_1$	$R_2$	1	3
к л м	5/0	20	6	$R_3$	$R_4$	2	4
н о п	6/0	25	8	$R_1$	$R_2$	1	3
р с т	0/2	5	2	$R_3$	$R_4$	2	4
у ф х	0/3	10	3	$R_1$	$R_2$	1	3
ц ч ш	0/4	15	4	$R_3$	$R_4$	2	4
щ ь ы ь	0/5	20	6	$R_1$	$R_2$	1	3
э ю я	0/6	25	8	$R_3$	$R_4$	2	4

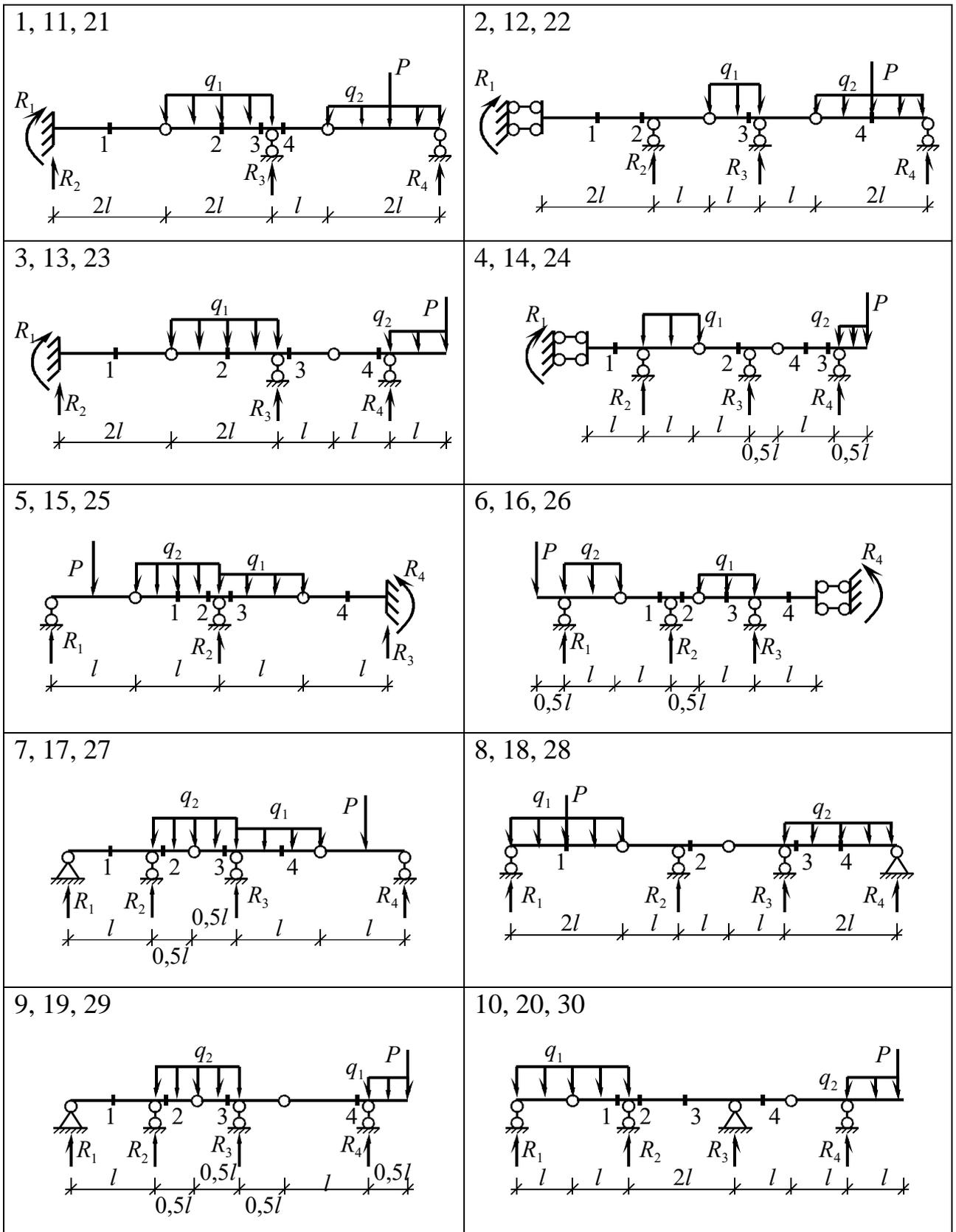
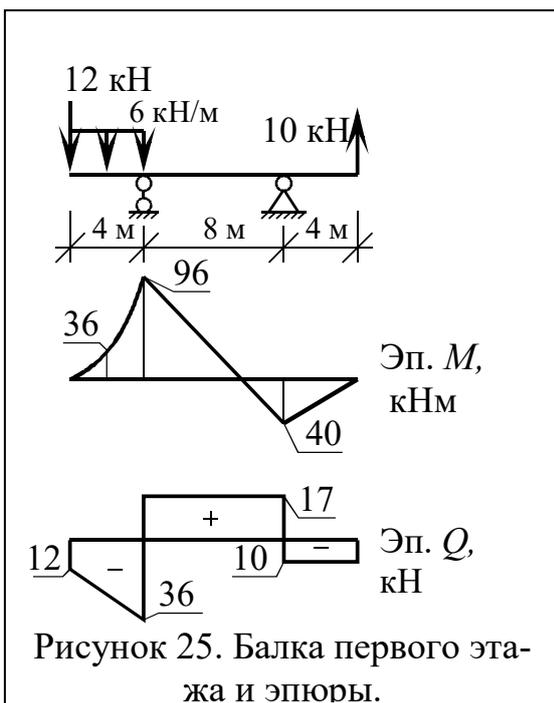
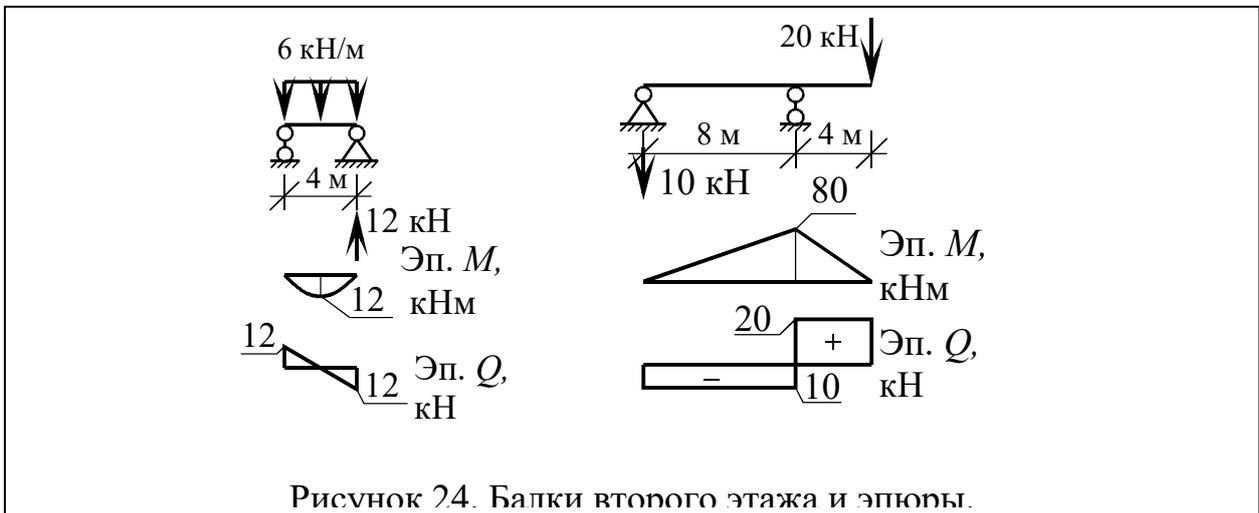
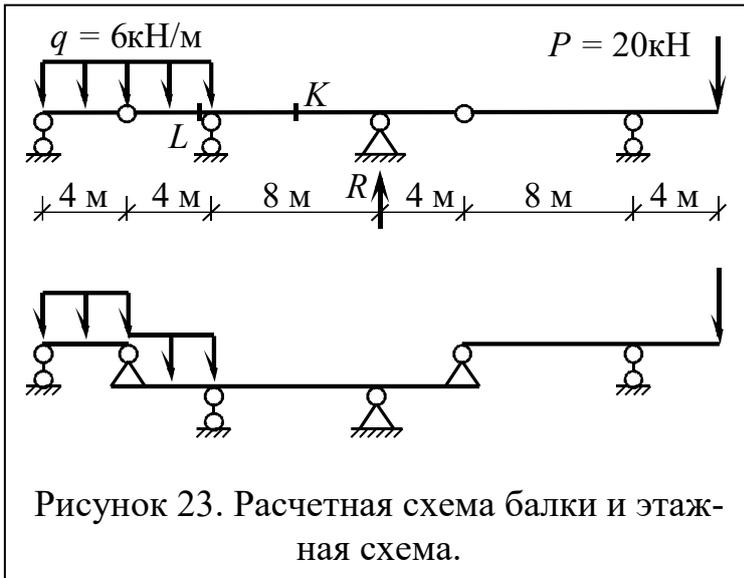


Рисунок 22. Расчетные схемы к задаче 5.

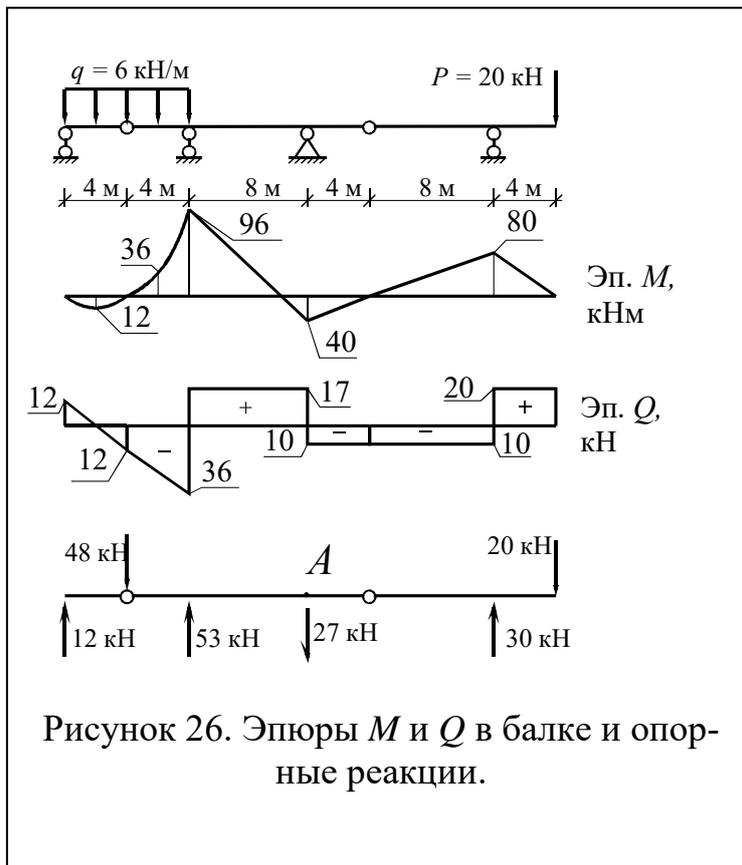
## Пример

Рассмотрим балку, показанную на рисунке 23. Для заданной балки изобразим этажную схему. В качестве первого этажа принимается балка, имеющая три связи с фундаментом. Отдельно для каждого этажа, начиная с верхнего, построим эпюры изгибающих



моментов и поперечных сил. На нижние этажи действует внешняя нагрузка и реакции от верхних этажей. На заданной балке получаем два вторых этажа и один этаж первый. Балки второго этажа показаны на рисунке 24. При построении эпюр использовались их свойства, известные из курса сопротивления материалов:

1. в шарнире изгибающий момент равен нулю,



2. производная момента есть поперечная сила. При этом на прямолинейном участке эпюры моментов производная равна тангенсу угла наклона эпюры моментов.

После расчета верхних этажей рассматриваем нижний этаж (рисунок 25). Эта балка нагружена кроме внешней нагрузки еще и реакциями, передающимися от верхних этажей.

После построения эпюр

на каждом отдельном этаже следует объединить их в эпюру для балки в целом (рисунок 26). Далее по «скачкам» на эпюрах находим опорные реакции и проверяем равновесие балки.

$$\sum F_y = 12 - 48 + 53 - 27 + 30 - 20 = 95 - 95 = 0,$$

$$\sum M_A = 12 \cdot 16 - 48 \cdot 12 + 53 \cdot 8 - 30 \cdot 12 + 20 \cdot 16 = 936 - 936 = 0.$$

По построенным эпюрам находим искомые усилия:  $R = -27$  кН,  $M_K = -28$  кНм,  $Q_K = 17$  кН,  $M_L = -96$  кНм и  $Q_L = -36$  кН.

Выполним расчет многопролетной шарнирной балки кинематическим методом. Он основан на принципе возможных перемещений, который гласит, что если конструкция находится в равновесии, то работа всех сил на бесконечно малых возможных перемещениях равна нулю. При использовании этого метода необходимо отбросить связь, усилие в которой определяется, и вместо нее приложить реакцию. После отбрасывания связи образуется механизм с одной степенью свободы. Далее задается возможное перемещение, записывается сумма работ всех сил на этом перемещении, которая приравнивается к нулю. При этом силы совершают работу на линейных перемещениях,

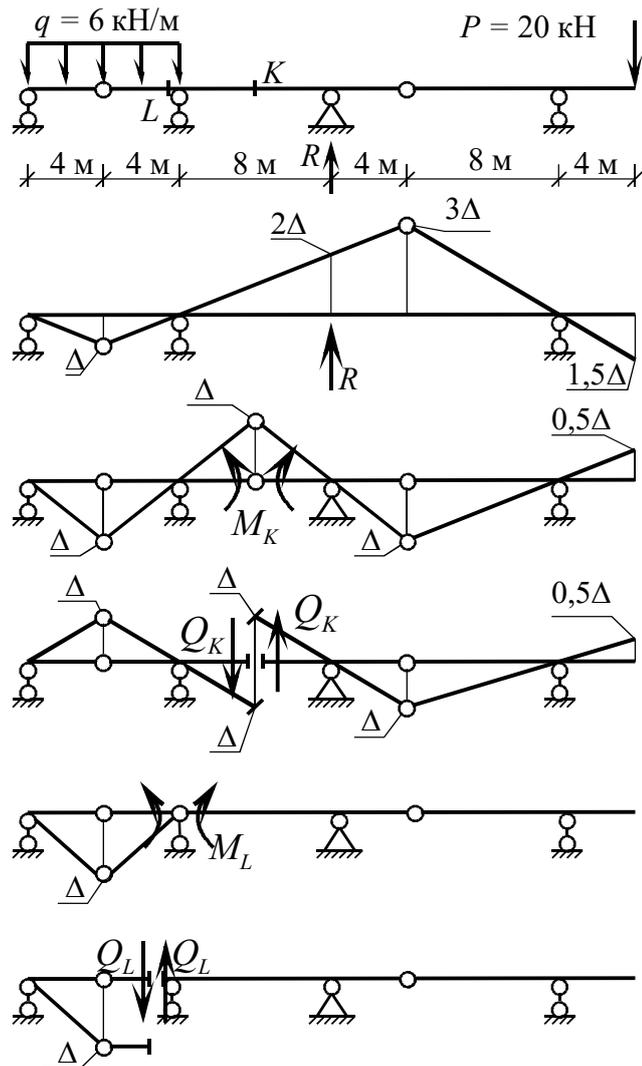


Рисунок 27. Расчетная схема балки и эпюры возможных перемещений.

моменты – на угловых (в силу малости возможных перемещений угол поворота равен тангенсу этого угла), распределенная нагрузка заменяется равнодействующей на каждом прямолинейном участке. Работа считается положительной, если сила и перемещение совпадают по направлению. Из полученного уравнения для возможной работы находится усилие.

Вычислим опорную реакцию, изгибающие моменты и поперечные силы в указанных сечениях для балки (рисунок 27). Найдем опорную реакцию  $R$ . Отбросим опору и зададим возможное перемещение. Работа сил на этом перемещении:

$$A = R \cdot 2\Delta + P \cdot 1,5\Delta + q \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \Delta + q \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \Delta = 0$$

В этом уравнении  $\Delta$  - малое перемещение, которое не равно нулю. Поэтому на него можно разделить уравнение. Отсюда определим опорную реакцию:

$$R = \frac{1}{2} \cdot \left( -20 \cdot 1,5 - 6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \right) = -27 \text{ кН.}$$

Аналогично вычислим изгибающий момент в сечении  $K$ :

$$A = M_K \cdot \frac{\Delta}{4} + M_K \cdot \frac{\Delta}{4} + q \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \Delta + q \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \Delta - P \cdot 0,5\Delta = 0,$$

$$M_K = \frac{4}{2} \cdot \left( -6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 - 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 + 20 \cdot 0,5 \right) = -28 \text{ кНм.}$$

Найдем поперечную силу в этом же сечении:

$$A = Q_K \cdot \Delta + Q_K \cdot \Delta - q \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \Delta - q \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \Delta - P \cdot 0,5\Delta = 0,$$

$$Q_K = \frac{1}{2} \left( 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 + 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 + 20 \cdot 0,5 \right) = 17 \text{ кН.}$$

Момент в сечении  $L$ :

$$A = M_L \cdot \frac{\Delta}{4} + M_L \cdot 0 - q \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \Delta - q \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \Delta = 0,$$

$$M_L = 4 \cdot \left( -6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 - 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \right) = -96 \text{ кНм.}$$

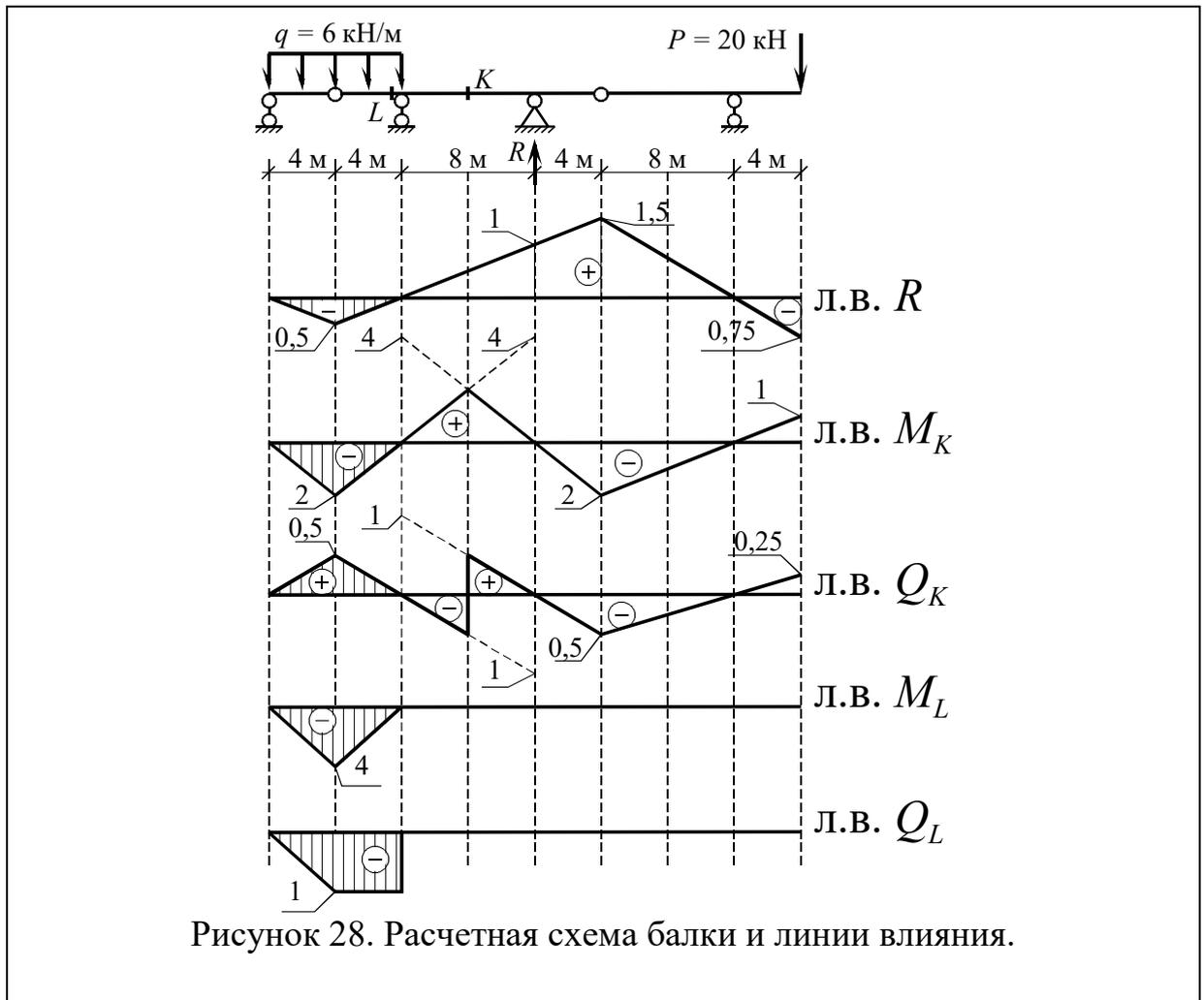
Поперечная сила в сечении  $L$ :

$$A = Q_L \cdot \Delta + Q_L \cdot 0 + q \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \Delta + q \cdot 4 \cdot \Delta = 0,$$

$$Q_L = -6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 - 6 \cdot 4 = -36 \text{ кН.}$$

Найдем те же усилия по линиям влияния. Сначала построим линии влияния. При этом руководствуемся правилами:

1. если груз находится на этаже, который ниже этажа с заданным сечением, то усилие равно нулю,
2. если груз находится на этаже с заданным сечением, то линия влияния строится как для одноэтажной балки (приложение А),



3. если груз находится на этаже выше сечения, то по теореме об узловой передаче нагрузки, следует провести прямую через две точки: одна из них – общая для этажей, вторая – нулевая ордината под опорой верхнего этажа.

Линии влияния показаны на рисунке 28. Для вычисления усилий необходимы ордината под силой  $P$  и площадь участка линии влияния под распределенной нагрузкой (на рисунке 28 – заштрихована) для каждой линии влияния.

Найдем опорную реакцию:

$$R = \sum (P \cdot y + q \cdot \omega) = -20 \cdot 0,75 - 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 0,5 = -27 \text{ кН.}$$

Изгибающий момент в сечении  $K$ :

$$M_K = 20 \cdot 1 - 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 = -28 \text{ кНм.}$$

Поперечная сила в сечении  $K$ :

$$Q_k = 20 \cdot 0,25 + 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 0,5 = 17 \text{ кН.}$$

Изгибающий момент в сечении  $L$ :

$$M_L = -6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 = -96 \text{ кНм.}$$

Поперечная сила в сечении  $L$ :

$$Q_L = -6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 - 6 \cdot 1 \cdot 4 = -36 \text{ кН.}$$

Результаты совпали с полученными по статическому и кинематическому методами. Заметим, что линии влияния можно получить кинематическим способом, если при построении эпюр возможных перемещений принять перемещение по направлению отброшенной связи равным единице.



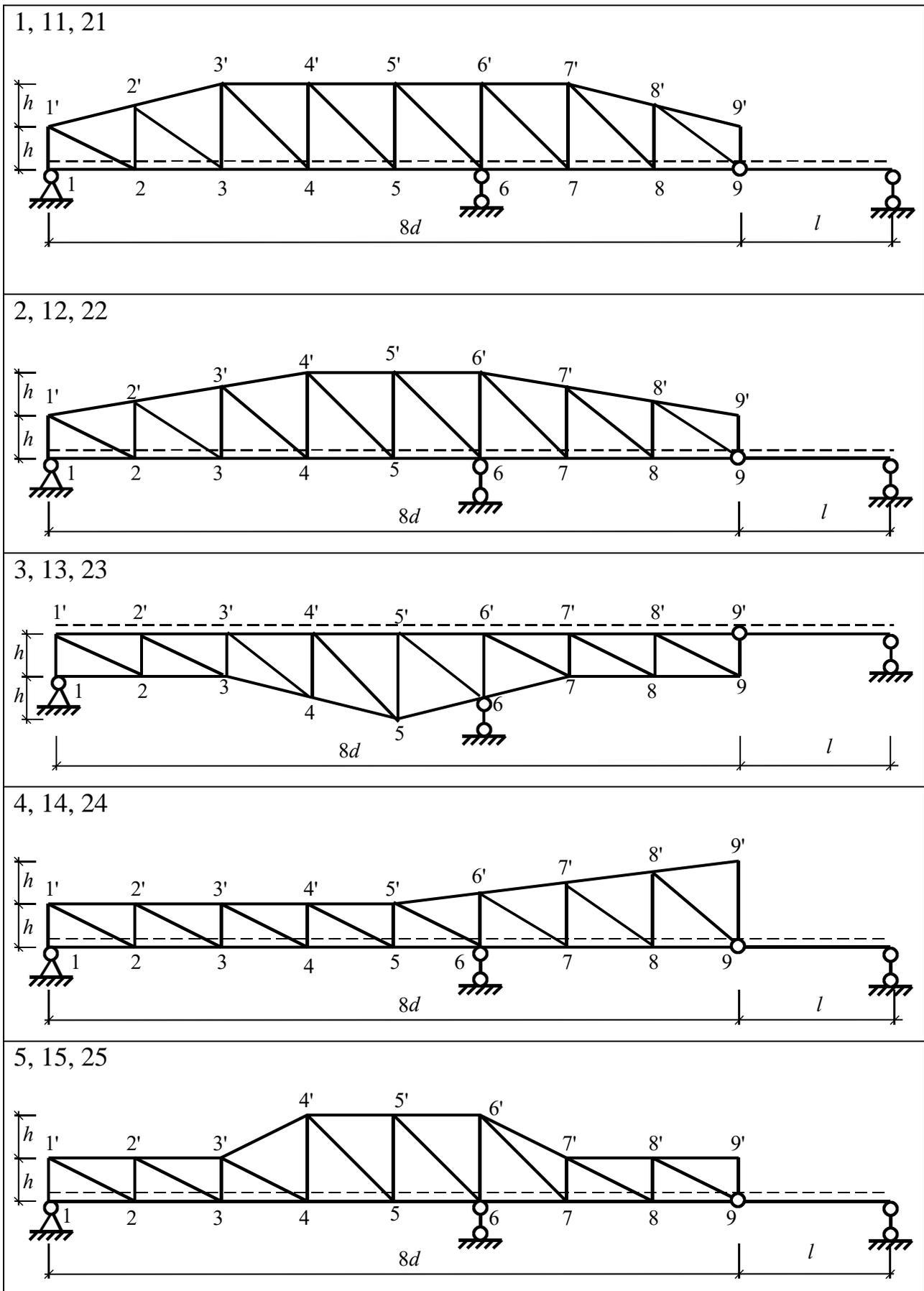
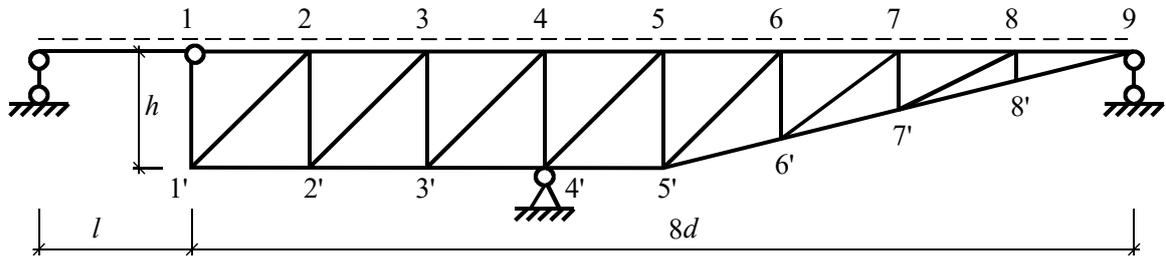
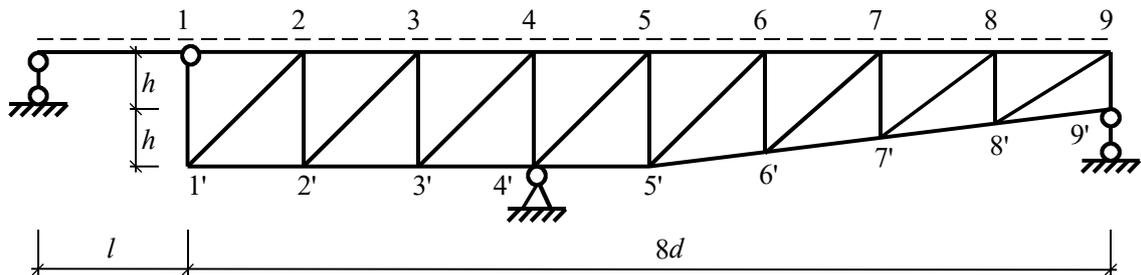


Рисунок 30. Расчетные схемы для задачи 6.

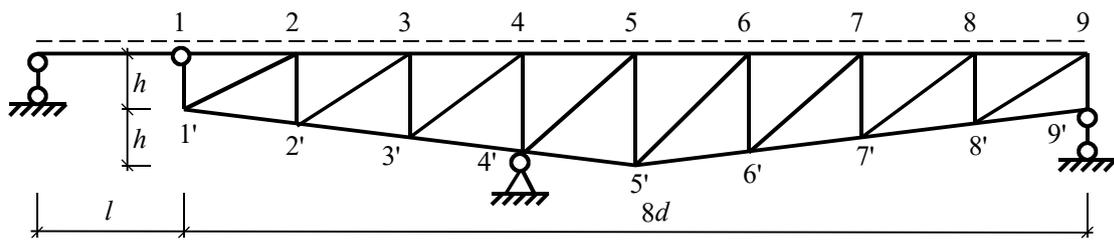
6, 16, 26



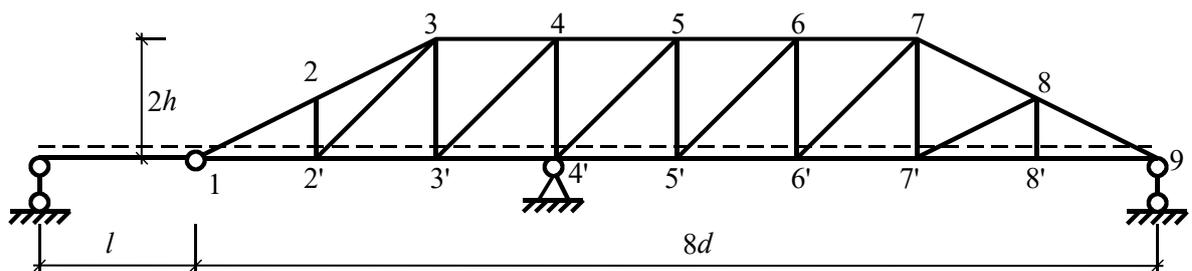
7, 17, 27



8, 18, 28



9, 19, 29



10, 20, 30

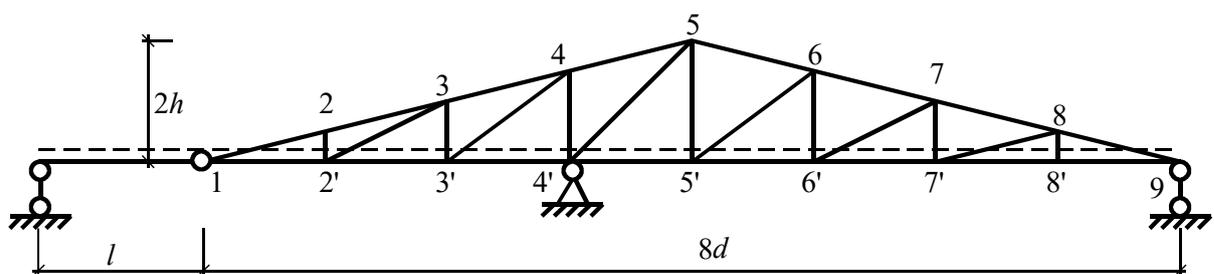
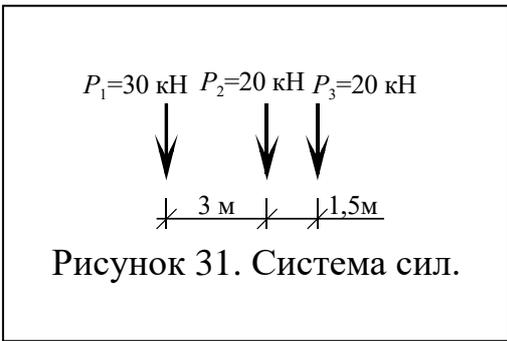


Рисунок 30. Расчетные схемы для задачи 6 (окончание).



### Пример

Требуется построить линии влияния усилий в стержнях 5-5', 8'-9, 5-6, 3-4', 6-6' и 2-3' фермы и загрузить их подвижной нагрузкой, показанной на рисунке 31, и по-



стоянной - равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q = 5 \text{ кН/м}$ , действующей по всей длине сооружения. Расчетная схема фермы показана на рисунке 32.

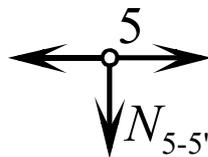
Построим линии влияния усилий в заданных стержнях

Л.в.  $N_{5-5'}$ . Вырезаем узел 5. (Безопорный узел ездового пояса)

$$\sum F_y = 0$$

Груз вне узла 5.

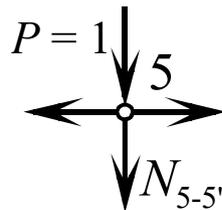
$$N_{5-5'} = 0$$



Груз в узле 5.

$$N_{5-5'} - P = 0$$

$$N_{5-5'} = -1$$



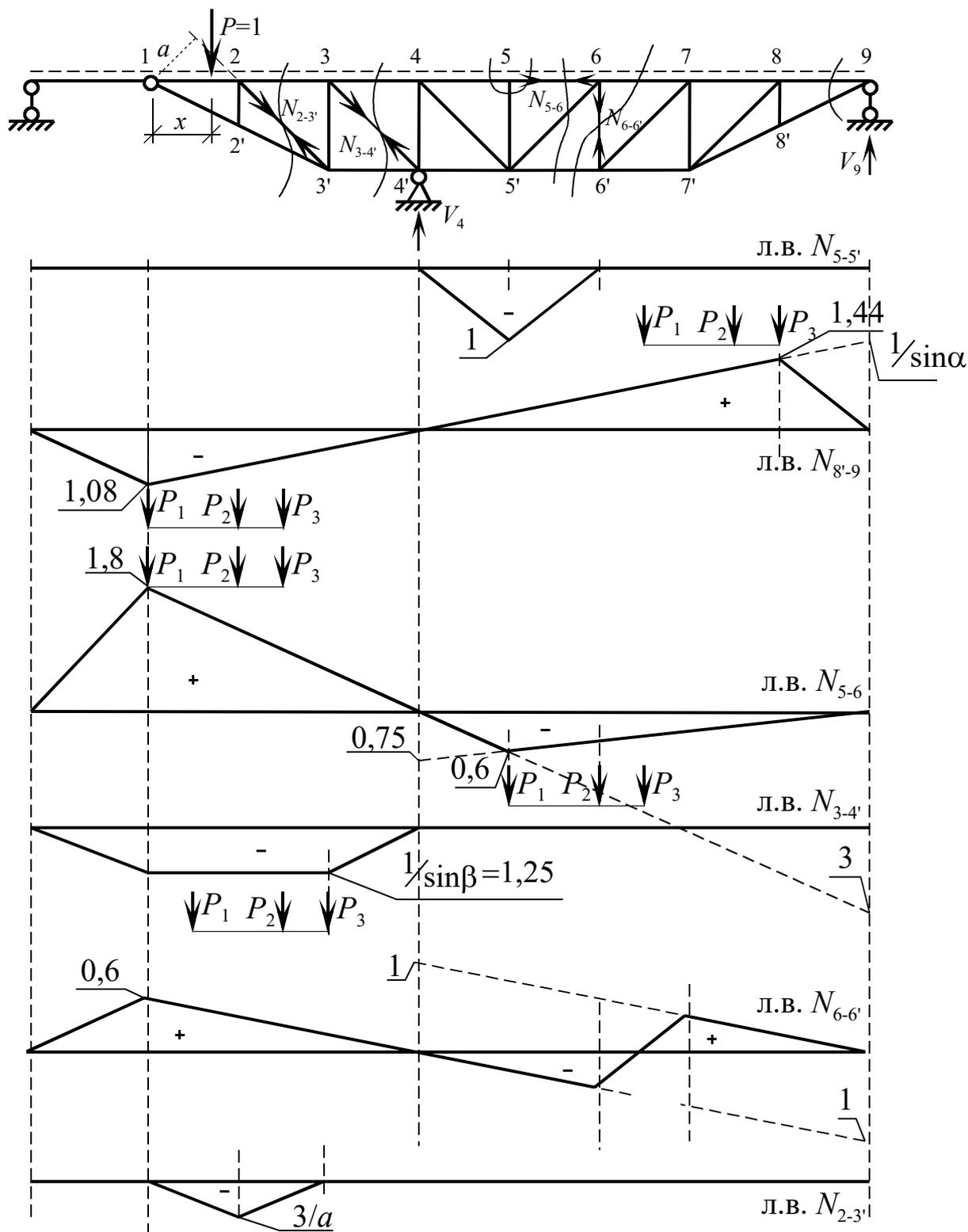


Рисунок 33. Линии влияния и их загрузка подвижной нагрузкой.

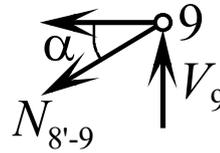
Л.в.  $N_{8'-9}$ . Вырезаем узел 9. (Опорный узел ездового пояса)

$$\sum F_y = 0$$

Груз вне узла 9.

$$N_{8'-9} \sin \alpha - V_9 = 0$$

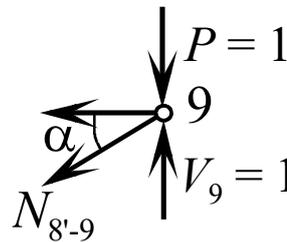
$$N_{8'-9} = \frac{1}{\sin \alpha} V_9$$



Груз в узле 9.

$$N_{8'-9} \sin \alpha - V_9 + P = 0$$

$$N_{8'-9} = \frac{1}{\sin \alpha} (P - V_9) = 0$$



Л.в.  $N_{5-6}$ . Моментная точка  $5'$ ,  $\sum M_5 = 0$ , разрезанная панель 5-6, сечение в пролете.

Груз слева от точки 5.

$$N_{5-6} \cdot 4 + V_9 \cdot 12 = 0,$$

$$N_{5-6} = -V_9 \cdot 3$$

Груз справа от точки 6.

$$N_{5-6} \cdot 4 + V_4 \cdot 3 = 0,$$

$$N_{5-6} = -V_4 \cdot 0,75$$

Л. в.  $N_{3-4'}$ . Моментная точка отсутствует,  $\sum F_y = 0$ , разрезанная панель 3-4, сечение на консоли.

Груз слева от точки 3.

$$N_{3-4'} \cdot \sin \beta + P = 0,$$

$$N_{3-4'} = -\frac{1}{\sin \beta}.$$

Груз справа от точки 4.

$$N_{3-4'} \cdot \sin \beta = 0,$$

$$N_{3-4'} = 0.$$

Л. в.  $N_{6-6'}$ . Моментной точки нет,  $\sum F_y = 0$ , разрезанная панель 6-7, сечение в пролете.

Груз слева от точки 6.

$$N_{6-6'} + V_9 = 0,$$

$$N_{6-6'} = -V_9.$$

Груз справа от точки 7.

$$N_{6-6'} - V_4 = 0,$$

$$N_{6-6'} = V_4.$$

Л.в.  $N_{2-3'}$ . Моментная точка 1,  $\sum M_1 = 0$ , разрезанная панель 2-3, сечение на консоли.

Груз слева от точки 2.

$$N_{2-3'} \cdot a + P \cdot x = 0,$$

$$N_{2-3'} = -\frac{x}{a}.$$

Груз справа от точки 3.

$$N_{2-3'} \cdot a = 0,$$

$$N_{2-3'} = 0.$$

Построенные по приведенным расчетам линии влияния показаны на рисунке 33.

Загрузим линию влияния  $N_{8-9}$ . Для расчета усилий необходимо найти ординаты. Сначала вычислим тригонометрические функции угла  $\alpha$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{6} = 0,667; \quad \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sqrt{1 + 0,667^2}}{0,667} = 1,80.$$

Далее вычислим ординаты над отрицательной и положительной вершинами линии влияния, используя геометрические соотношения (рисунок 33)

Для расстановки грузов на линии влияния вычислим правую часть критерия экстремального положения нагрузки на треугольной линии влияния:

$$\sum P_{ЛЕВ} \leq \frac{a_K}{l} \sum P,$$

$$\sum P_{ЛЕВ} + P_{КР} \geq \frac{a_K}{l} \sum P.$$

Для отрицательного участка получим

$$\frac{a_k}{l} \sum P = \frac{6}{15} \cdot 70 = 28 \text{ кН.}$$

Критерию удовлетворяет сила  $P_1$ . Все силы находятся над одним прямолинейным участком линии влияния, значит, ее можно заменить равнодействующей, однако в данном случае такая замена нерациональна, так как необходимо искать положение равнодействующей. Найдем наибольшее отрицательное усилие:

$$N_{8'-9}^{HO} = \sum (P_i \cdot y_i) = -30 \cdot 1,08 - 20 \cdot \frac{1,08}{9} \cdot 6 - 20 \cdot \frac{1,08}{9} \cdot 4,5 = -57,6 \text{ кН.}$$

Для положительного участка правая часть критерия равна

$$\frac{a_k}{l} \sum P = \frac{12}{15} \cdot 70 = 56 \text{ кН.}$$

Критическим является груз  $P_3$ . Вычислим наибольшее положительное усилие:

$$N_{8'-9}^{HП} = \sum (P_i \cdot y_i) = 30 \cdot \frac{1,44}{12} \cdot 7,5 + 20 \cdot \frac{1,44}{12} \cdot 9 + 20 \cdot 1,44 = 77,4 \text{ кН.}$$

Найдем усилие от постоянной нагрузки:

$$N_{8'-9}^q = q \cdot \omega_{ЛВ} = 5 \cdot \left( -\frac{1}{2} \cdot 1,08 \cdot 15 + \frac{1}{2} \cdot 1,44 \cdot 15 \right) = 13,5 \text{ кН.}$$

Вычислим расчетные усилия:

$$N_{8'-9}^{\max} = N_{8'-9}^{HП} + N_{8'-9}^q = 77,4 + 13,5 = 90,9 \text{ кН,}$$

$$N_{8'-9}^{\min} = N_{8'-9}^{HO} + N_{8'-9}^q = -57,6 + 13,5 = -44,1 \text{ кН.}$$

Загружаем линию влияния  $N_{5-6}$ . Найдем ординаты, необходимые для вычисления усилий (рисунок 33). Для этого снова используем геометрические соотношения.

Найдем  $N_{5-6}^{III}$ . Для этого вычислим правую часть критерия

$$\frac{a_k}{l} \sum P = \frac{6}{15} \cdot 70 = 28 \text{ кН.}$$

Критическим является груз  $P_1$ . Вычислим усилие:

$$N_{5-6}^{III} = 30 \cdot 1,8 + 20 \cdot \frac{1,8}{9} \cdot 6 + 20 \cdot \frac{1,8}{9} \cdot 4,5 = 96 \text{ кН.}$$

Для  $N_{5-6}^{HO}$  правая часть критерия

$$\frac{a_k}{l} \sum P = \frac{3}{15} \cdot 70 = 14 \text{ кН.}$$

Критическим является груз  $P_1$ . Вычислим усилие:

$$N_{5-6}^{HO} = -30 \cdot 0,6 - 20 \cdot \frac{0,6}{12} \cdot 9 - 20 \cdot \frac{0,6}{12} \cdot 7,5 = -34,5 \text{ кН.}$$

Найдем усилие от постоянной нагрузки, а также максимальное и минимальное:

$$N_{5-6}^q = 5 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 1,8 \cdot 15 - \frac{1}{2} \cdot 0,6 \cdot 15 \right) = 45 \text{ кН,}$$

$$N_{5-6}^{\max} = N_{5-6}^{III} + N_{5-6}^q = 96 + 45 = 141 \text{ кН,}$$

$$N_{5-6}^{\min} = N_{5-6}^{HO} + N_{5-6}^q = -34,5 + 45 = 10,5 \text{ кН.}$$

Загружаем линию влияния  $N_{3-4'}$ . Наибольшее положительное усилие равно нулю. Чтобы расположить грузы для вычисления наибольшего отрицательного усилия нет необходимости использовать критерий, достаточно расположить все силы над горизонтальным участком линии влияния, как показано на рисунке 33.

$$N_{3-4'}^{HO} = -30 \cdot 1,25 - 20 \cdot 1,25 - 20 \cdot 1,25 = -87,5 \text{ кН.}$$

Найдем усилие от постоянной нагрузки, а также максимальное и минимальное:

$$N_{3-4'}^q = 5 \cdot \left( \frac{-15-6}{2} \cdot 1,25 \right) = -65,6 \text{ кН},$$

$$N_{3-4'}^{\max} = N_{3-4'}^{HI} + N_{3-4'}^q = 0 - 65,6 = -65,6 \text{ кН},$$

$$N_{3-4'}^{\min} = N_{3-4'}^{HO} + N_{3-4'}^q = -87,5 - 65,6 = -153,1 \text{ кН}.$$

**Задача 7.** Вычисление расчетных усилий в стержнях ферм.

Требуется:

1. Построить линии влияния усилий в указанных стержнях.
2. Загрузить любые три из них эквивалентной нагрузкой по СНиП 2.05.03-84\* (приложение Б) и постоянной нагрузкой  $q$ , действующей по всей длине сооружения.
3. Вычислить расчетные усилия.

Исходные данные принять по таблице 7, расчетная схема выбирается по рисунку 34,  $l = 4d$ .

Таблица 7.

Исходные данные к задаче 7.

Алфавит	$q$ , кН/м	$d$ , м	$\frac{h}{d}$	Расчетные стержни			
а б в	2	3	0,75	4-5	3'-5'	3'-3, 11'-11	4'-5
г д е	3	4	1,0	5-6	5'-7'	5'-5, 12'-12	6'-7
ж з и й	4	6	1,25	6-7	7'-9'	7'-7, 13'-13	8'-9
к л м	6	8	1,5	7-8	9'-11'	5'-5, 11'-11	10'-11
н о п	8	10	1,75	8-9	11'-13'	7'-7, 12'-12	12'-13
р с т	2	3	0,75	9-10	13'-15'	3'-3, 13'-13	4'-5
у ф х	3	4	1,0	10-11	3'-5'	3'-3, 12'-12	6'-7
ц ч ш	4	6	1,25	1-12	5'-7'	5'-5, 13'-13	8'-9
щ ъ ы ь	6	8	1,5	12-13	7'-9'	7'-7, 11'-11	10'-11
э ю я	8	10	1,75	13-14	9'-11'	3'-3, 11'-11	12'-13

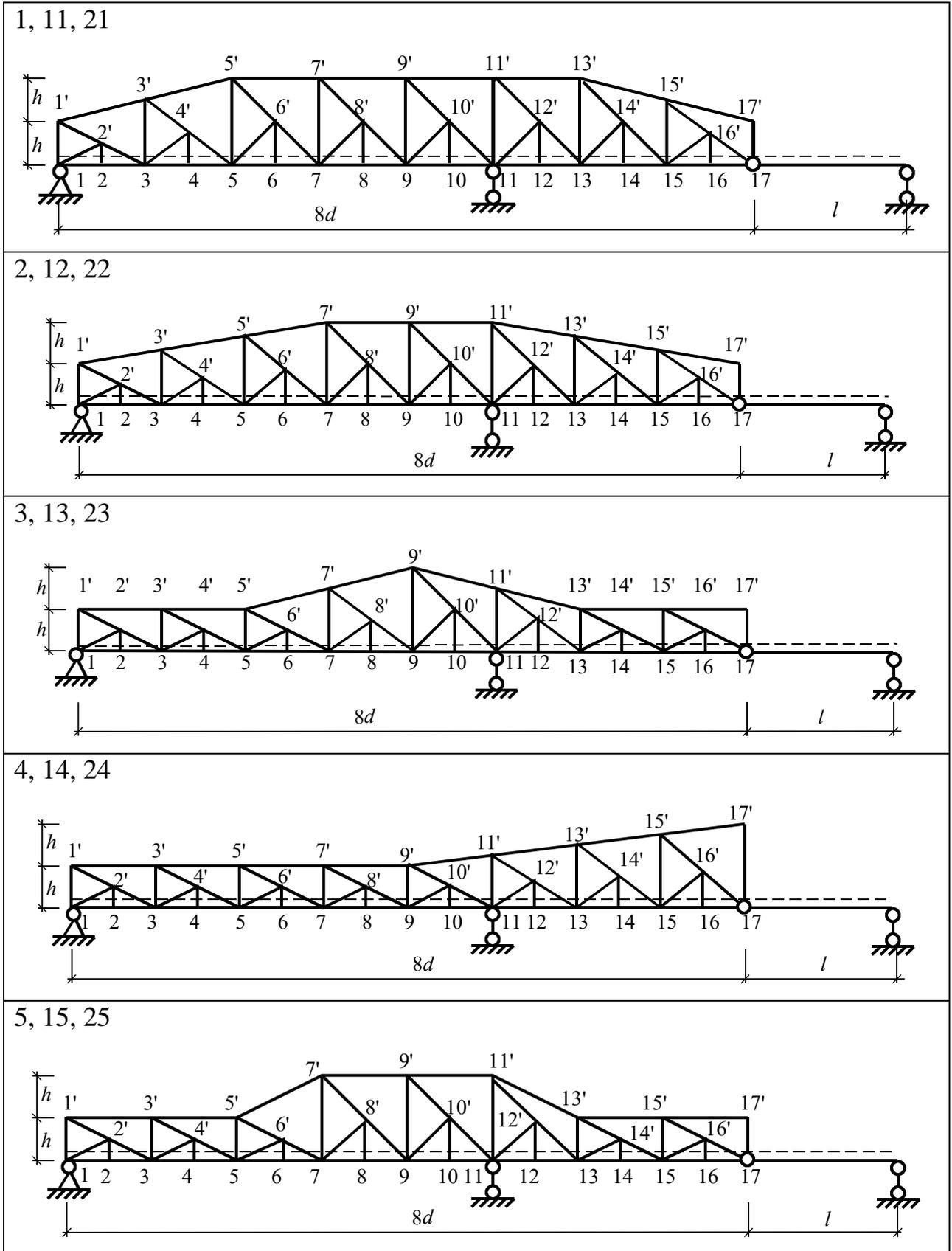


Рисунок 34. Расчетные схемы для задачи 7.

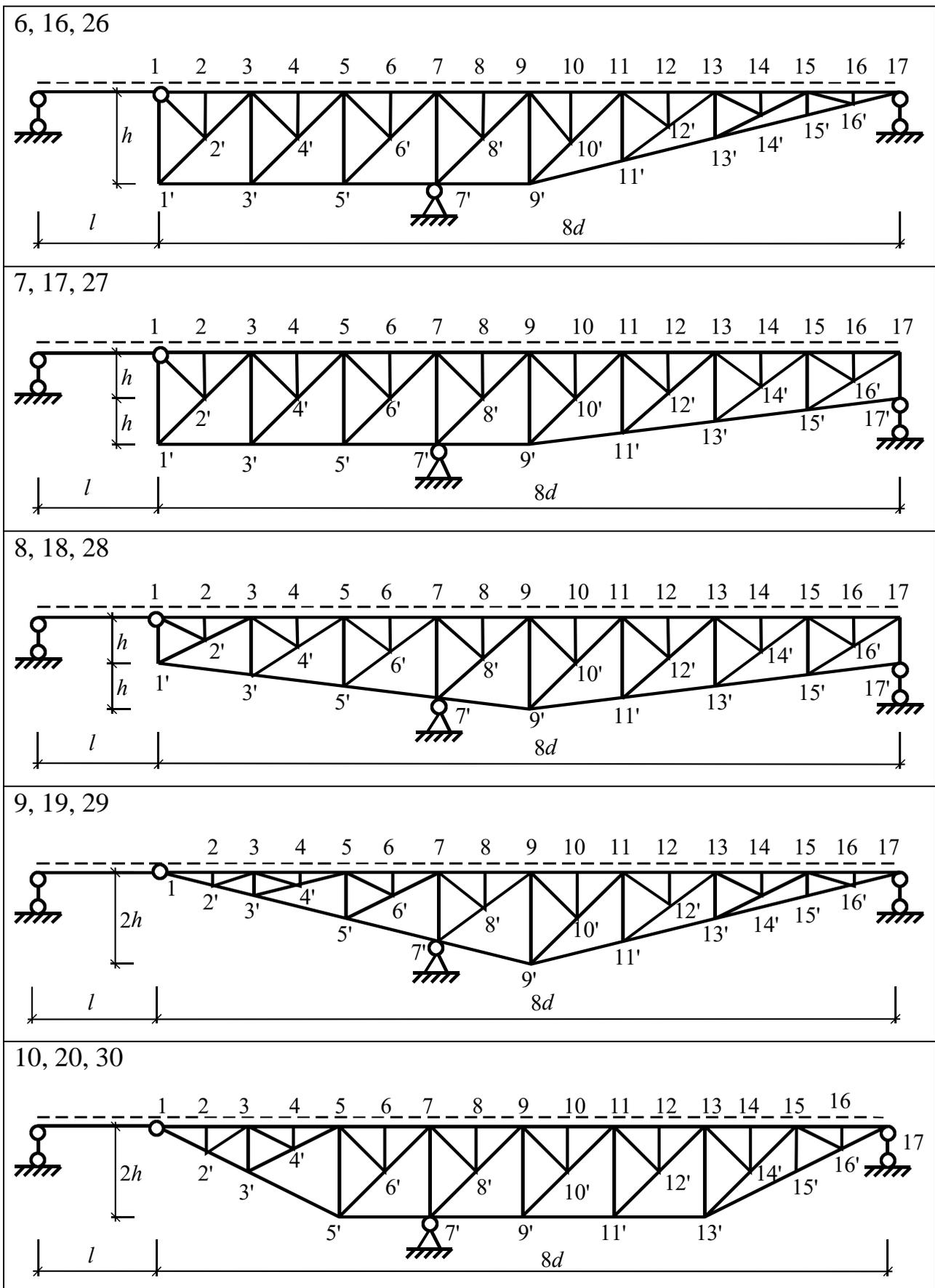


Рисунок 34. Расчетные схемы для задачи 7 (окончание).

## Пример

Построить линии влияния усилий в стержнях фермы 10'-12', 13'-14, 7'-8', 8-9', 11-12, 4-5 и загрузить их эквивалентной нагрузкой класса 14 по СНиП 2.05.03-84\*, и постоянной нагрузкой - равномерно распределенной интенсивностью  $q = 150 \text{ кН/м}$ . Расчетная схема фермы показана на рисунке 35.



Рисунок 35. Расчетная схема фермы.

Построим линии влияния усилий в заданных стержнях

Л.в.  $N_{10'-12'}$ . Моментная точка 10,  $\sum M_{10} = 0$ , стержень основной, разрезанная панель 10-11.

Груз слева от точки 10.

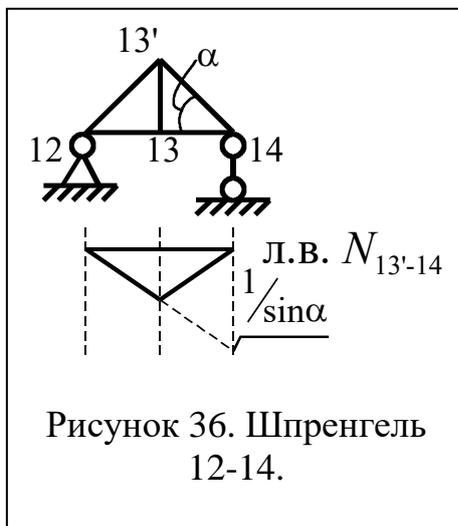
$$N_{10'-12'} \cdot 4 + V_{16} \cdot 9 = 0,$$

$$N_{10'-12'} = -2,25 \cdot V_{16}.$$

Груз справа от точки 12.

$$N_{10-12} \cdot 4 + V_6 \cdot 6 = 0,$$

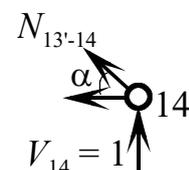
$$N_{10'-12'} = -1,5V_6.$$



Л.в.  $N_{13'-14}$ . Стержень шпренгельный. Рассмотрим отдельно шпренгель (рисунок 36). Вырезаем узел 14.

Груз вне узла 14.

$$N_{13'-14} \sin \alpha + V_{14} = 0,$$

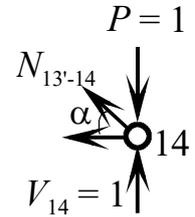


$$N_{13'-14} = -\frac{1}{\sin \alpha} \cdot V_{14}.$$

Груз в узле 14.

$$N_{13'-14} \sin \alpha + V_{14} - P = 0,$$

$$N_{13'-14} \frac{1}{\sin \alpha} \cdot (P - V_{14}) = 0.$$



Линия влияния  $N_{7'-8'}$ . Моментная точка 1,  $\sum M_1 = 0$ , стержень основной, разрезанная панель 6-8.

Груз слева от узла 6.

$$N_{7'-8'} \cdot a - V_{16} \cdot 24 = 0, \quad N_{7'-8'} = \frac{24}{a} \cdot V_{16}.$$

Груз справа от узла 8.

$$N_{7'-8'} \cdot a + V_6 \cdot 9 = 0, \quad N_{7'-8'} = -\frac{9}{a} \cdot V_6.$$

Л.в.  $N_{8-9}$ . Моментной точки нет,  $\sum F_y = 0$ , стержень составной, разрезанная панель 8-9.

Груз слева от точки 8.

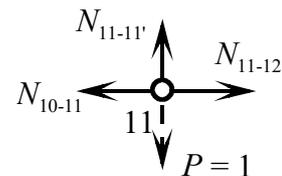
$$N_{8-9'} \cdot \sin \alpha - V_{16} = 0, \quad N_{8-9'} = \frac{1}{\sin \alpha} \cdot V_{16}.$$

Груз справа от точки 9.

$$N_{8-9'} \cdot \sin \alpha + V_6 = 0, \quad N_{8-9'} = -\frac{1}{\sin \alpha} \cdot V_6$$

Л.в.  $N_{11-12}$ . Стержень составной. Вырезаем узел 11.

$$\sum F_x = N_{11-12} - N_{10-11} = 0, \quad N_{11-12} = N_{10-11}$$



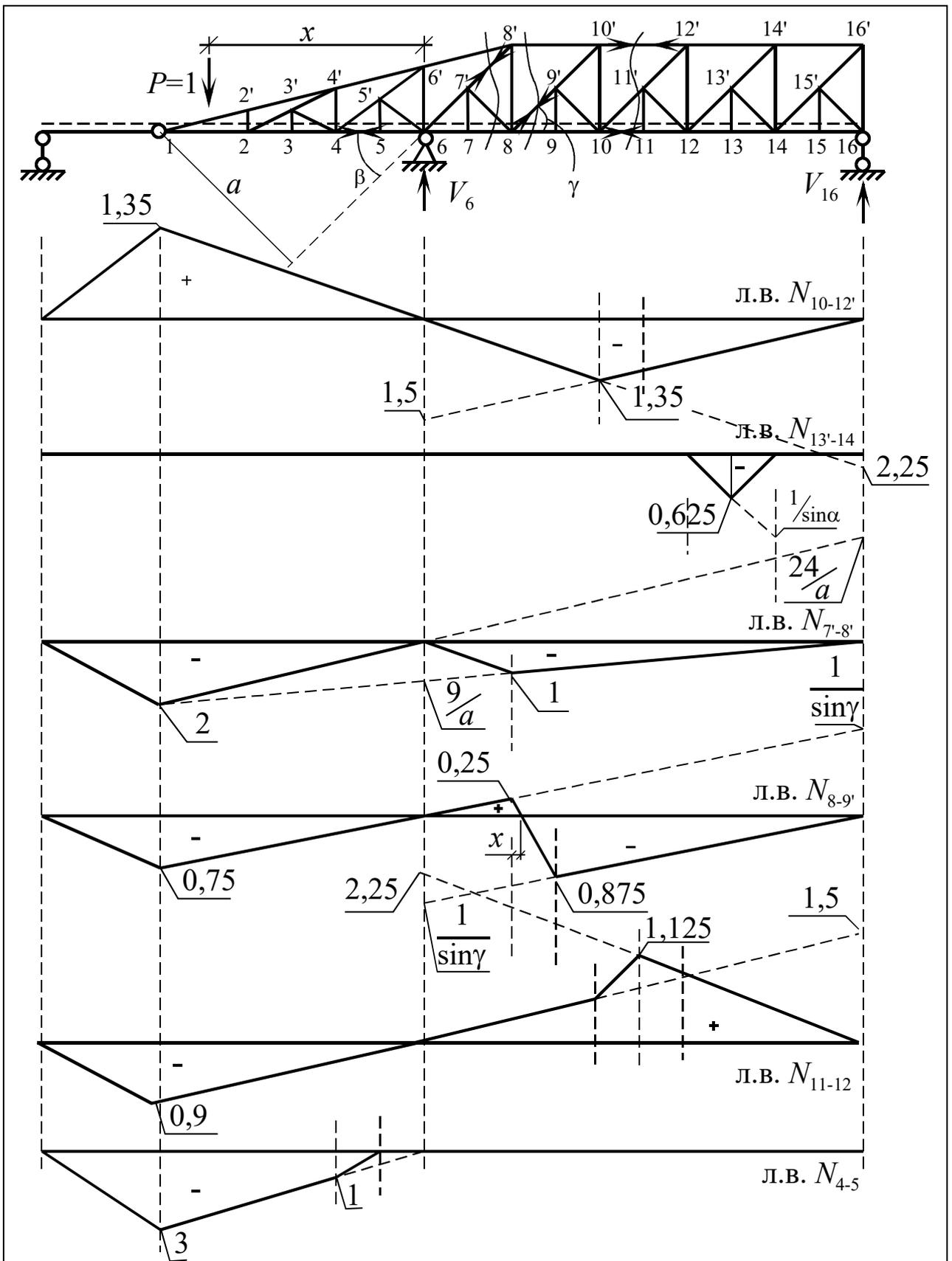


Рисунок 37. Линии влияния усилий в стержнях фермы

Линии влияния усилий  $N_{10-11}$  и  $N_{11-12}$  одинаковы. Моментная точка 12',  $\sum M_{12'} = 0$ , разрезанная панель 10-11.

Груз слева от узла 10.

$$N_{10-11} \cdot 4 - V_{16} \cdot 6 = 0, \quad N_{12-13} = 1,5 \cdot V_{16}.$$

Груз справа от узла 11.

$$N_{10-11} \cdot 4 - V_6 \cdot 9 = 0, \quad N_{12-13} = 2,25 \cdot V_6.$$

Л.в.  $N_{4-5}$ . Моментная точка 6', разрезанная панель 4-5.

Груз слева от узла 4.

$$N_{4-5} \cdot 3 + P \cdot x = 0, \quad N_{4-5} = -\frac{x}{3}.$$

$$x = 0, N_{4-5} = 0; \quad x = 9, N_{4-5} = -3.$$

Груз справа от узла 5.

$$N_{4-5} \cdot 3 = 0, \quad N_{4-5} = 0.$$

Вычислим расчетные усилия в стержнях.

Стержень 10-12'. Из геометрических соотношений получим ординаты вершин (рисунок 37)

Чтобы получить усилие в стержне найдем эквивалентную нагрузку по таблице приложения Б.

Для положительного участка линии влияния получим  $\alpha = \frac{8}{17} = 0,471$  и  $\lambda = 17$  м. По таблице эквивалентных нагрузок при  $\alpha = 0$  для длины загрузки  $\lambda = 16$  м имеем  $q_{16;0} = 219,3$  кН/м и для длины загрузки  $\lambda = 18$  м  $q_{18;0} = 212,7$  кН/м. Используя линейную интерполяцию, найдем эквивалентную нагрузку для длины  $\lambda = 17$  м  $q_{17;0} = 216,0$  кН/м.

Аналогично при  $\alpha = 0,5$  из таблицы выбираем  $q_{16;0,5} = 191,8$  кН/м и  $q_{18;0,5} = 186,0$  кН/м, для  $\lambda = 17$  м получим  $q_{17;0,5} = 188,9$  кН/м.

Далее по интерполяции найдем  $q_{17;0,471} = 190,5$  кН/м.

Вычислим наибольшее положительное усилие:

$$N_{10'-12'}^{HP} = q_{15;0,4} \cdot \omega_{ЛВ} = 190,5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,35 \cdot 17 = 2186 \text{ кН.}$$

Для отрицательного участка линии влияния получим  $\alpha = \frac{6}{15} = 0,4$  и  $\lambda = 15 \text{ м}$ . По интерполяции найдем  $q_{15;0,4} = 200,7 \text{ кН/м}$ , и усилие

$$N_{10'-12'}^{HO} = q_{15;0,4} \cdot \omega_{ЛВ} = -200,7 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,9 \cdot 15 = -1355 \text{ кН.}$$

Усилие от постоянной нагрузки:

$$N_{10'-12'}^q = q \cdot \omega_{ЛВ} = 150 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 1,35 \cdot 17 - \frac{1}{2} \cdot 0,9 \cdot 15 \right) = 709 \text{ кН.}$$

Расчетные усилия:

$$N_{10'-12'}^{\max} = N_{10'-12'}^{HP} + N_{10'-12'}^q = 2186 + 709 = 2892 \text{ кН.}$$

$$N_{10'-12'}^{\min} = N_{10'-12'}^{HO} + N_{10'-12'}^q = -1355 + 709 = -646 \text{ кН.}$$

Загрузим линию влияния усилия  $N_{13'-14}$ . Для этой линии влияния имеем  $\lambda = 3 \text{ м}$  и  $\alpha = \frac{1,5}{3} = 0,5$ . По таблице эквивалентных нагрузок найдем  $q_{3;0,5} = 296,0 \text{ кН/м}$ . Наибольшее положительное усилие равно нулю. Найдем усилия: наибольшее отрицательное, от постоянной нагрузки, максимальное и минимальное:

$$N_{13'-14}^{HO} = -296,0 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,625 \cdot 3 = -277,5 \text{ кН,}$$

$$N_{13'-14}^q = -150 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,625 \cdot 3 = -140,6 \text{ кН,}$$

$$N_{13'-14}^{\max} = N_{13'-14}^{HP} + N_{13'-14}^q = 0 - 140,6 = -140,6 \text{ кН,}$$

$$N_{13'-14}^{\min} = N_{13'-14}^{HO} + N_{13'-14}^q = -277,5 - 140,6 = -418,1 \text{ кН.}$$

Стержень 11-12. Вычислим ординаты вершин по геометрическим соотношениям (рисунок 37).

По таблице эквивалентных нагрузок найдем для отрицательного участка линии влияния  $q_{17;0,471} = 188,9 \text{ кН/м}$ . Положительный участок не треугольной формы, но требования СНиП 2.05.03-84\* разрешают рассматривать такие участки (вогнутые) как треугольные. Имеем  $\lambda = 15 \text{ м}$  и  $\alpha = 7,5/15 = 0,5$ . Интерполяция данных таблицы эквивалентных нагрузок дает  $q_{15;0,5} = 195,0 \text{ кН/м}$ .

Вычислим усилия: наибольшее положительное, наибольшее отрицательное, от постоянной нагрузки, максимальное и минимальное:

$$N_{11-12}^{HP} = 195,0 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,125 \cdot 15 = 1645 \text{ кН},$$

$$N_{11-12}^{HO} = -188,9 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,9 \cdot 17 = -1445 \text{ кН},$$

$$N_{11-12}^q = 150 \cdot \left( -\frac{1}{2} \cdot 0,9 \cdot 17 + \frac{1}{2} \cdot 1,125 \cdot 15 \right) = 118,1 \text{ кН},$$

$$N_{11-12}^{\max} = N_{11-12}^{HP} + N_{11-12}^q = 1645 + 118,1 = 1763 \text{ кН},$$

$$N_{11-12}^{\min} = N_{11-12}^{HO} + N_{11-12}^q = -1445 + 118,1 = -1327 \text{ кН}.$$

Стержень 4-5. Вычислим ординаты вершин по геометрическим соотношениям (рисунок 37).

Положительный участок отсутствует, т.е.  $N_{11-12}^{HO} = 0$ . Для отрицательного участка примем длину загрузки  $\lambda = 17 \text{ м}$  и  $\alpha = 8/17 = 0,471$ . При этом результат получим с некоторой погрешностью, но эта погрешность идет «в запас», так как увеличивается площадь линии влияния. При этом из таблицы эквивалентных нагрузок найдем  $q_{17;0,471} = 188,9 \text{ кН/м}$ . вычислим усилия: наибольшее отрицательное, от постоянной нагрузки, максимальное и минимальное:

$$N_{4-5}^{HO} = 188,9 \cdot \left( -\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 + \frac{-3-1}{2} \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1,5 \right) = -4675 \text{ кН},$$

$$N_{4-5}^q = 150 \cdot \left( -\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 + \frac{-3-1}{2} \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1,5 \right) = -3712 \text{ кН},$$

$$N_{4-5}^{\max} = N_{4-5}^{III} + N_{4-5}^q = 0 - 4675 = -4675 \text{ кН},$$

$$N_{4-5}^{\min} = N_{4-5}^{HO} + N_{4-5}^q = -3712 - 4675 = -8387 \text{ кН}.$$

### Задача 8. Вычисление усилий в арке с помощью линий влияния.

Требуется:

1. Построить линии влияния усилий  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  в расчетном сечении арки и загрузить их нагрузкой, заданной в задаче №3.
2. Сравнить полученные усилия с результатами задачи №3.

Исходные данные принять по таблице 3.



### Пример

Построить линии влияния изгибающего момента, поперечной и продольной сил в сечении  $K$  арки и нагрузить полученные линии влияния. Расчетная схема арки показана на рисунке 38. Рассмотрим арку, очерченную по квадратной параболе,

заданной уравнением

$$y = 4f \left( \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right).$$

Найдем некоторые вспомогательные величины (см. приложение В):

$$\text{координаты сечения } x_K = a_K = 10 \text{ м, } y_K = 4 \cdot 10 \cdot \left( \frac{10}{30} - \frac{10^2}{30^2} \right) = 8,89 \text{ м;}$$

тригонометрические функции угла наклона касательной к арке в сечении  $K$

$$\text{tg } \varphi_K = \frac{dy}{dx} = 4f \left( \frac{1}{l} - \frac{2a_K}{l^2} \right) = 4 \cdot 10 \cdot \left( \frac{1}{30} - \frac{2 \cdot 10}{30^2} \right) = 0,444;$$

$$\cos \varphi_K = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \varphi_K}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,444^2}} = 0,914;$$

$$\sin \varphi_K = \cos \varphi_K \cdot \text{tg } \varphi_K = 0,914 \cdot 0,444 = 0,406;$$

$$\text{ctg } \varphi_K = \frac{1}{\text{tg } \varphi_K} = \frac{1}{0,444} = 2,25,$$

$$\operatorname{tg} \varphi_A = \frac{y_K}{a_K} = \frac{8,89}{10} = 0,889,$$

$$\operatorname{tg} \varphi_B = \frac{2f}{l} = \frac{2 \cdot 10}{30} = 0,667.$$

Построим линию влияния изгибающего момента. Определим положение нулевой точки  $x_M$  (приложение В).

$$x_M = \frac{l \cdot \operatorname{tg} \varphi_B}{\operatorname{tg} \varphi_A + \operatorname{tg} \varphi_B} = \frac{30 \cdot 0,667}{0,889 + 0,667} = 12,86 \text{ м.}$$

Теперь можно найти характерные ординаты линии влияния – под сечением  $K$ :

$$y_K = \frac{a_K}{x_M} \cdot (x_M - a_K) = \frac{10}{12,86} \cdot (12,86 - 10) = 2,22 \text{ м,}$$

и под замковым шарниром  $C$ :

$$y_C = \frac{a_K}{x_M} \cdot \left( \frac{l}{2} - x_M \right) = \frac{10}{12,86} \cdot (15 - 12,86) = 1,66 \text{ м.}$$

Линия влияния показана на рисунке 39. Вычислим площадь участка, расположенного под распределенной нагрузкой (на рисунке отмечена штриховкой):

$$\omega = \frac{1}{2} \cdot 1,66 \cdot 15 = 12,45 \text{ м}^2,$$

и момент в сечении:

$$M_K = q \cdot \omega = 8 \cdot 12,45 = 99,6 \text{ кНм.}$$

Построим линию влияния поперечной силы. Положение нулевой точки (приложение В):

$$x_Q = \frac{l \cdot \operatorname{tg} \varphi_B}{\operatorname{tg} \varphi_K + \operatorname{tg} \varphi_B} = \frac{30 \cdot 0,667}{0,444 + 0,667} = 18,0 \text{ м.}$$

Далее найдем ординаты под сечением  $K$  (слева):

$$y_{K,л} = \frac{\cos \varphi_K}{x_Q} a_K = \frac{0,914}{18,0} \cdot 10 = 0,508,$$

под сечением  $K$  (справа):

$$y_{K,ПП} = \frac{\cos \varphi_K}{x_Q} (x_Q - a_K) = \frac{0,914}{18,0} \cdot (18 - 10) = 0,406,$$

и под замковым шарниром:

$$y_c = \frac{\cos \varphi_K}{x_Q} \left( x_Q - \frac{l}{2} \right) = \frac{0,914}{18,0} \cdot \left( 18 - \frac{30}{2} \right) = 0,152.$$

Линия влияния показана на рисунке 39. Вычислим площадь участка, расположенного под распределенной нагрузкой (на рисунке отмечена штриховкой):

$$\omega = -\frac{1}{2} \cdot 0,152 \cdot 15 = -1,14 \text{ м},$$

и поперечную силу в сечении:

$$Q_K = q \cdot \omega = -8 \cdot 1,14 = -9,12 \text{ кН}.$$

Построим линию влияния продольной силы (рисунок 39). Для вычисления ординат необходимо найти нулевую точку  $x_N$  (приложение В):

$$x_N = \frac{l \cdot \operatorname{tg} \varphi_B}{\operatorname{ctg} \varphi_K - \operatorname{tg} \varphi_B} = \frac{30 \cdot 0,667}{2,25 - 0,667} = 12,64 \text{ м}.$$

Далее найдем характерные ординаты:

под сечением  $K$  (слева)

$$y_{K,Л} = \frac{\sin \varphi_K}{x_N} a_K = \frac{0,406}{12,64} \cdot 10 = 0,321;$$

под сечением  $K$  (справа)

$$y_{K,ПП} = \frac{\sin \varphi_K}{x_N} (a_K + x_N) = \frac{0,406}{12,64} (10 + 12,64) = 0,727;$$

под замковым шарниром

$$y_K = \frac{\sin \varphi_K}{x_N} \left( \frac{l}{2} + x_N \right) = \frac{0,406}{12,64} \left( \frac{30}{2} + 12,64 \right) = 0,888.$$

Вычислим площадь линии влияния, расположенную под распределенной нагрузкой:

$$\omega = -\frac{1}{2} \cdot 0,888 \cdot 15 = -6,66 \text{ м},$$

и продольную силу в сечении:

$$N_K = q \cdot \omega = -8 \cdot 6,66 = -53,28 \text{ кН.}$$

Сравнивая полученные результаты со статическим расчетом (задача 3), видим, что с точностью до погрешности округления усилия получились одинаковыми.

наковыми.

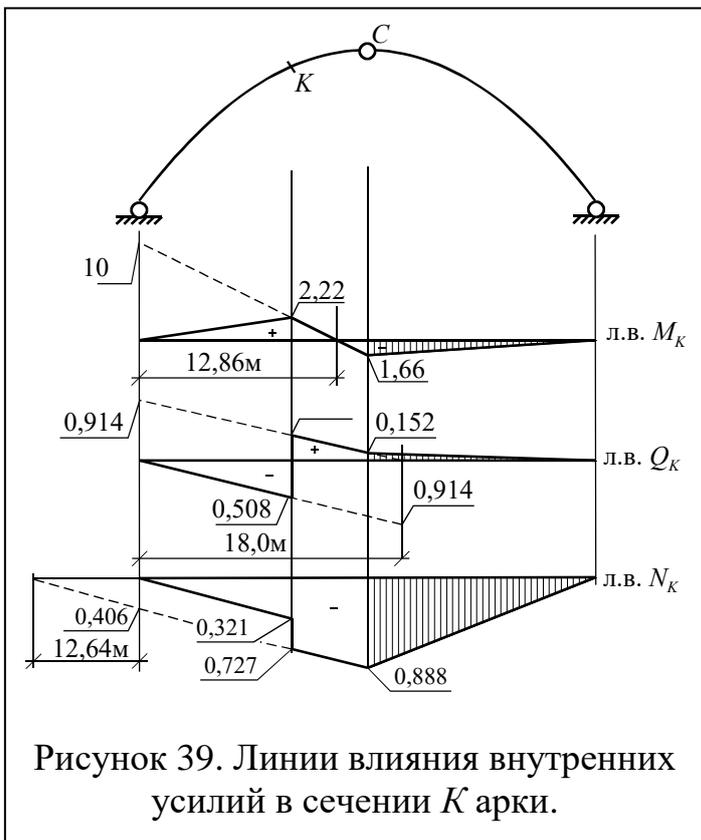


Рисунок 39. Линии влияния внутренних усилий в сечении  $K$  арки.

**Задача 9.** Вычисление перемещений в статически определимой раме от нагрузки и осадки опор.

Требуется:

1. Построить грузовую и единичные эпюры изгибающих моментов.
2. Вычислить перемещения расчетных сечений от нагрузки (вертикальное, горизонтальное и угол поворота).
3. Изобразить деформированный вид рамы от нагрузки.
4. Вычислить перемещения расчетных сечений от осадки опор.

Исходные данные принять по таблице 9. Расчетная схема выбирается по рисунку 40.

Таблица 9.

Исходные данные к задаче 9.

Алфавит	$q$ , кН/м	$P$ , кН	$m$ , кНм	$\frac{EJ_p}{EJ_c}$	Осадки опор (для линейных – метры, для угловых – радианы)			Расчетные сечения
					$C_1$	$C_2$	$C_3$	
а б в	2	10	20	1,5	0,01	0,01	0,01	$K_1, L_1$
г д е	3	12	25	2,0	0,02	0,02	0,02	$K_2, L_2$
ж з и й	4	15	30	2,5	0,03	0,03	0,03	$K_1, L_1$
к л м	5	18	45	3	0,04	0,04	0,04	$K_2, L_2$
н о п	6	25	60	3,5	0,06	0,06	0,06	$K_1, L_1$
р с т	2*	10*	20*	1,5*	0,01*	0,01*	0,01*	$K_2, L_2$
у ф х	3*	12*	25*	2,0*	0,02*	0,02*	0,02*	$K_1, L_1$
ц ч ш	4*	15*	30*	2,5*	0,03*	0,03*	0,03*	$K_2, L_2$
щ ь ы ь	5*	18*	45*	3*	0,04*	0,04*	0,04*	$K_1, L_1$
э ю я	6*	25*	60*	3,5*	0,06*	0,06*	0,06*	$K_2, L_2$

Примечание: знак (\*) означает, что направление нагрузки или осадки следует изменить на противоположное.

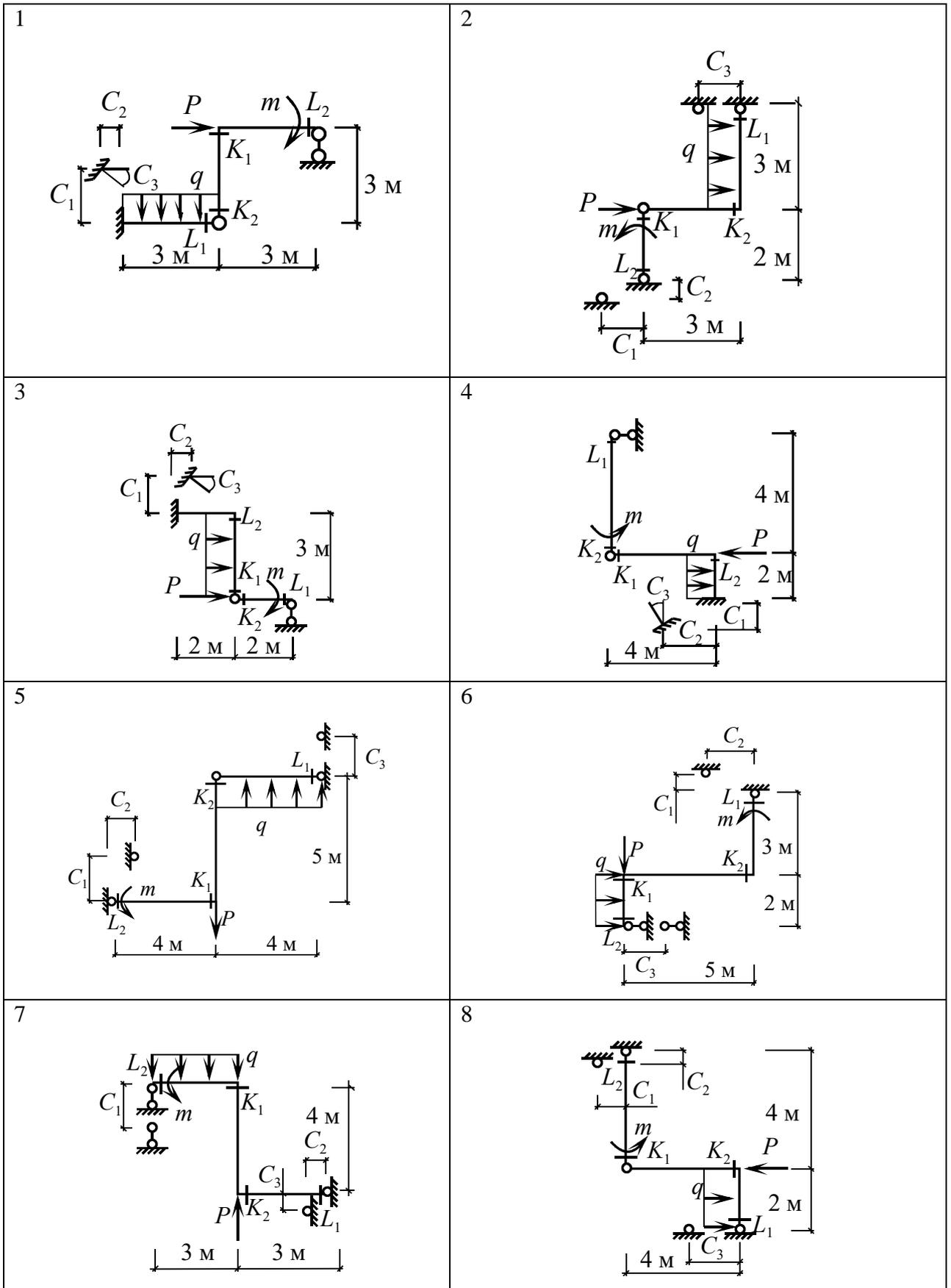


Рисунок 40. Расчетные схемы к задаче 9.

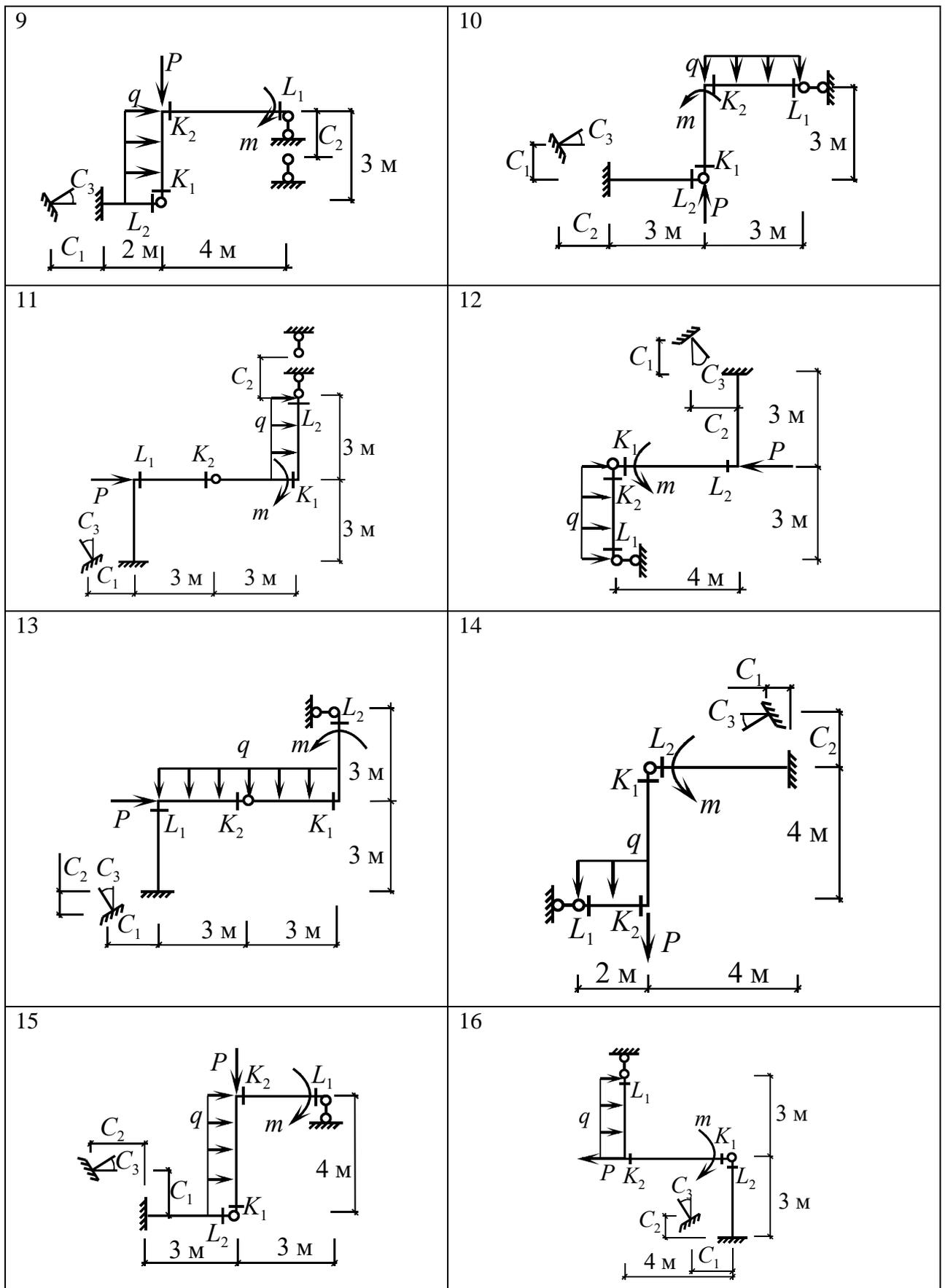


Рисунок 40. Расчетные схемы к задаче 9 (продолжение).

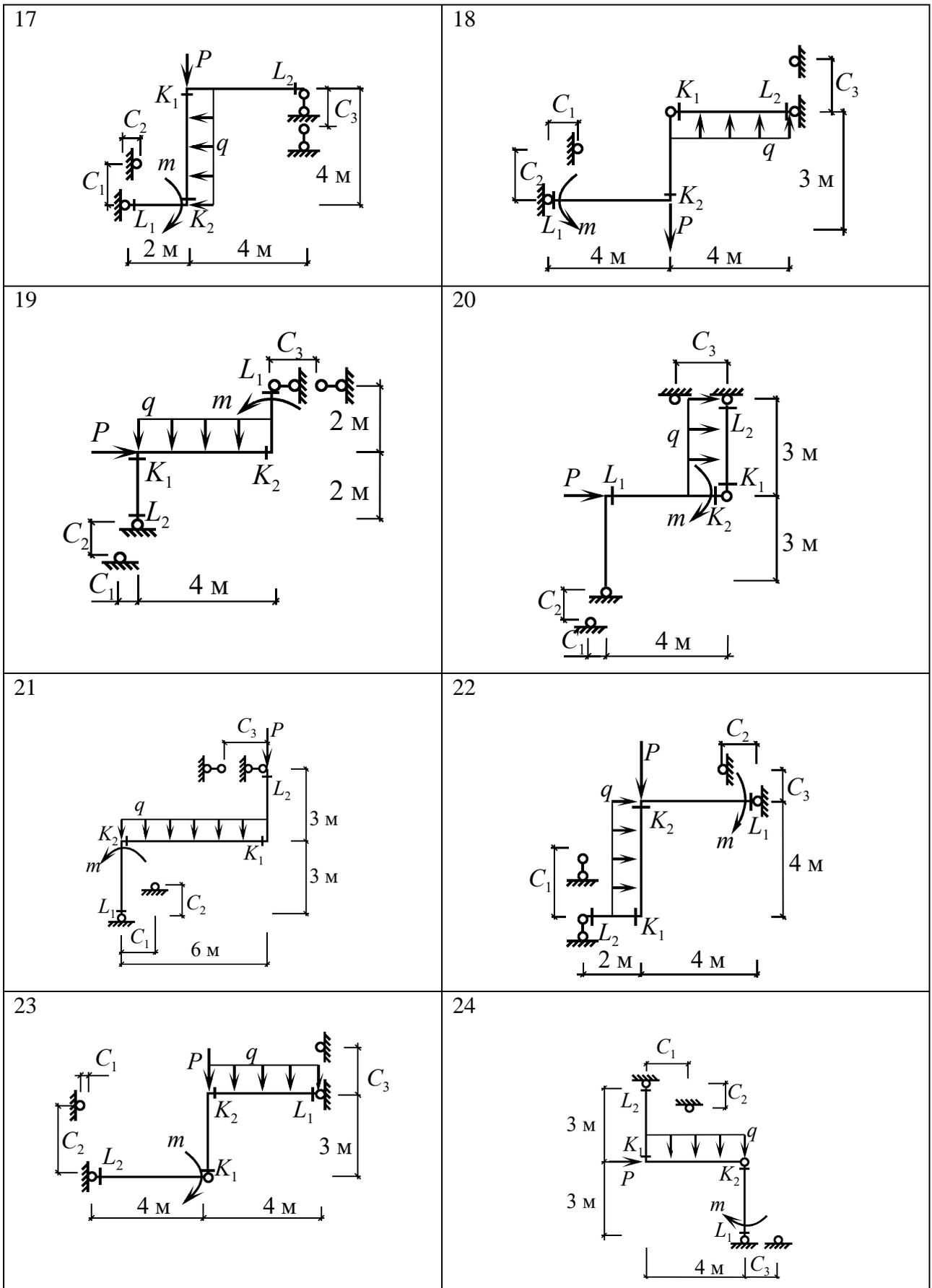


Рисунок 40. Расчетные схемы к задаче 9 (продолжение).

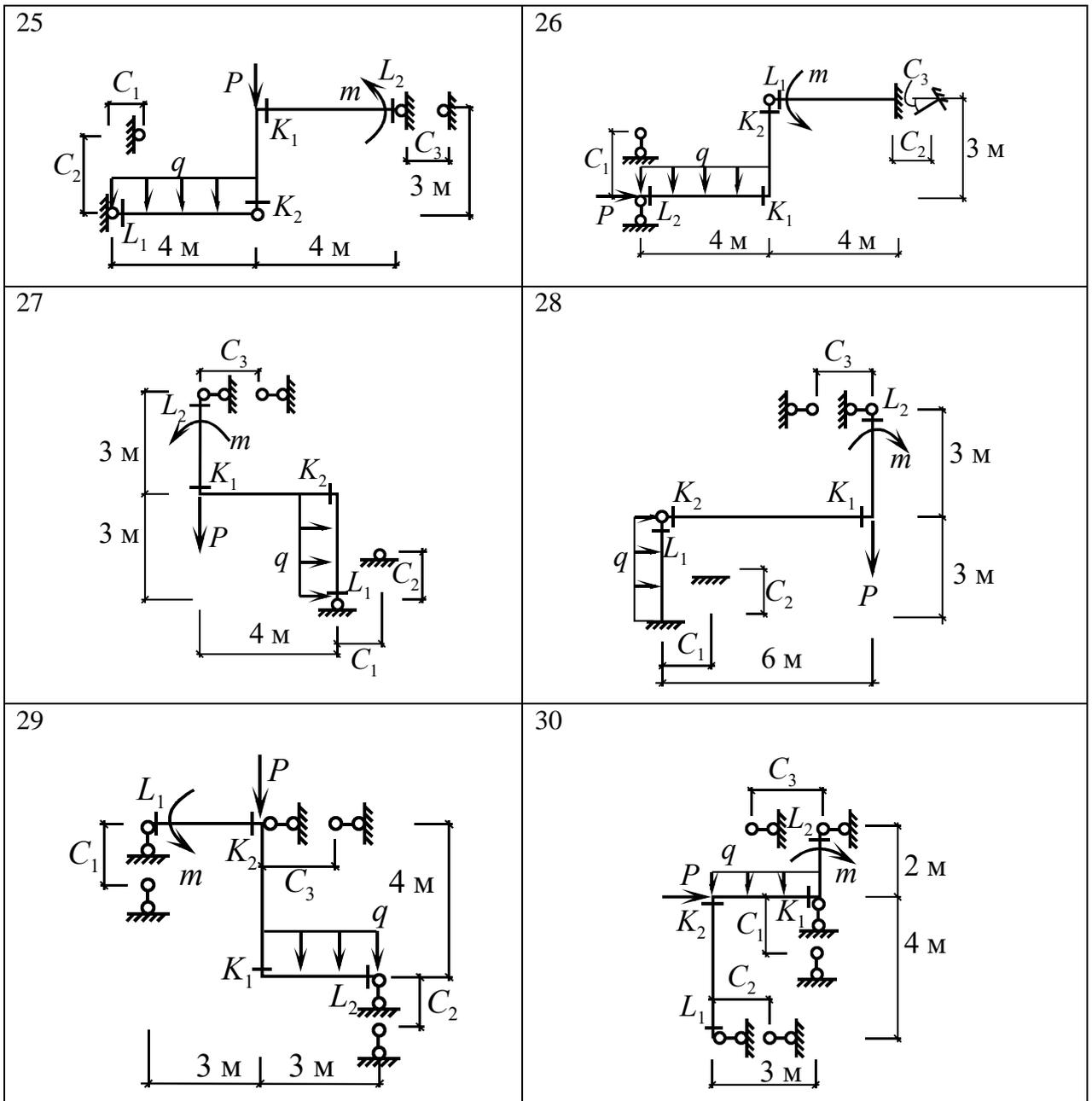
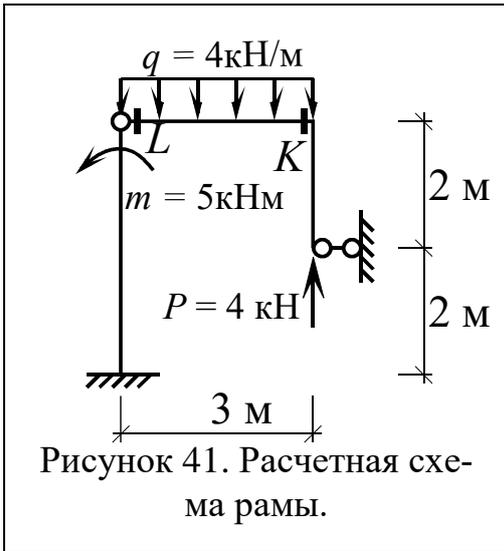


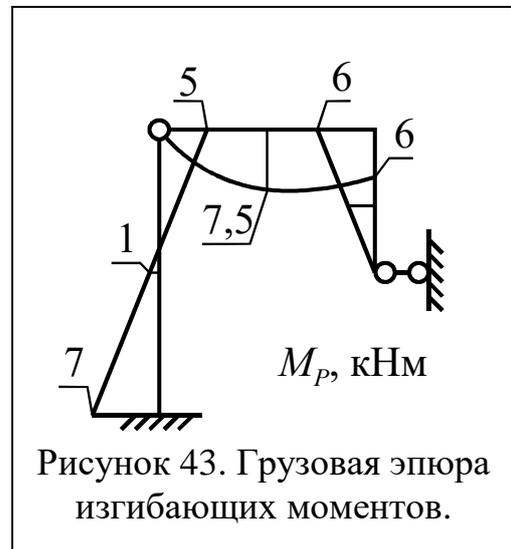
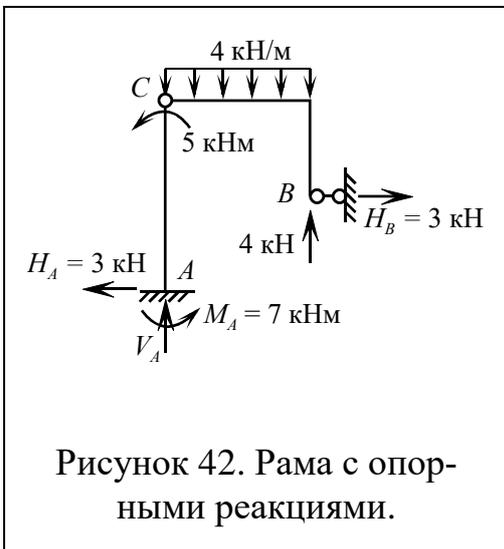
Рисунок 40. Расчетные схемы к задаче 9 (окончание).



### Пример

Для статически определимой рамы, показанной на рисунке 41, найти вертикальное и горизонтальное перемещения и угол поворота сечений  $K$  и  $L$  от нагрузки и от осадки опор.  $J_P/J_C = 1,5$ .

Для вычисления перемещений от нагрузки необходимо построить грузовую эпюру изгибающих моментов. Найдем



опорные реакции (рисунок 42).

Из уравнения  $\sum M_C^{IPAB} = 0$  получим реакцию  $H_B = 3 \text{ кН}$ , из  $\sum F_x = 0$  найдем  $H_A = 3 \text{ кН}$  и из  $\sum M_C^{HIB} = 0$  -  $M_A = 7 \text{ кНм}$ . Вертикальная реакция  $V_A$  для построения эпюры не требуется. Построенная эпюра  $M_P$  показана на рисунке 43.

Далее необходимо построить эпюры изгибающих моментов от единичных сил, приложенных по направлению искомым перемещений в заданных сечениях (рисунок 44).

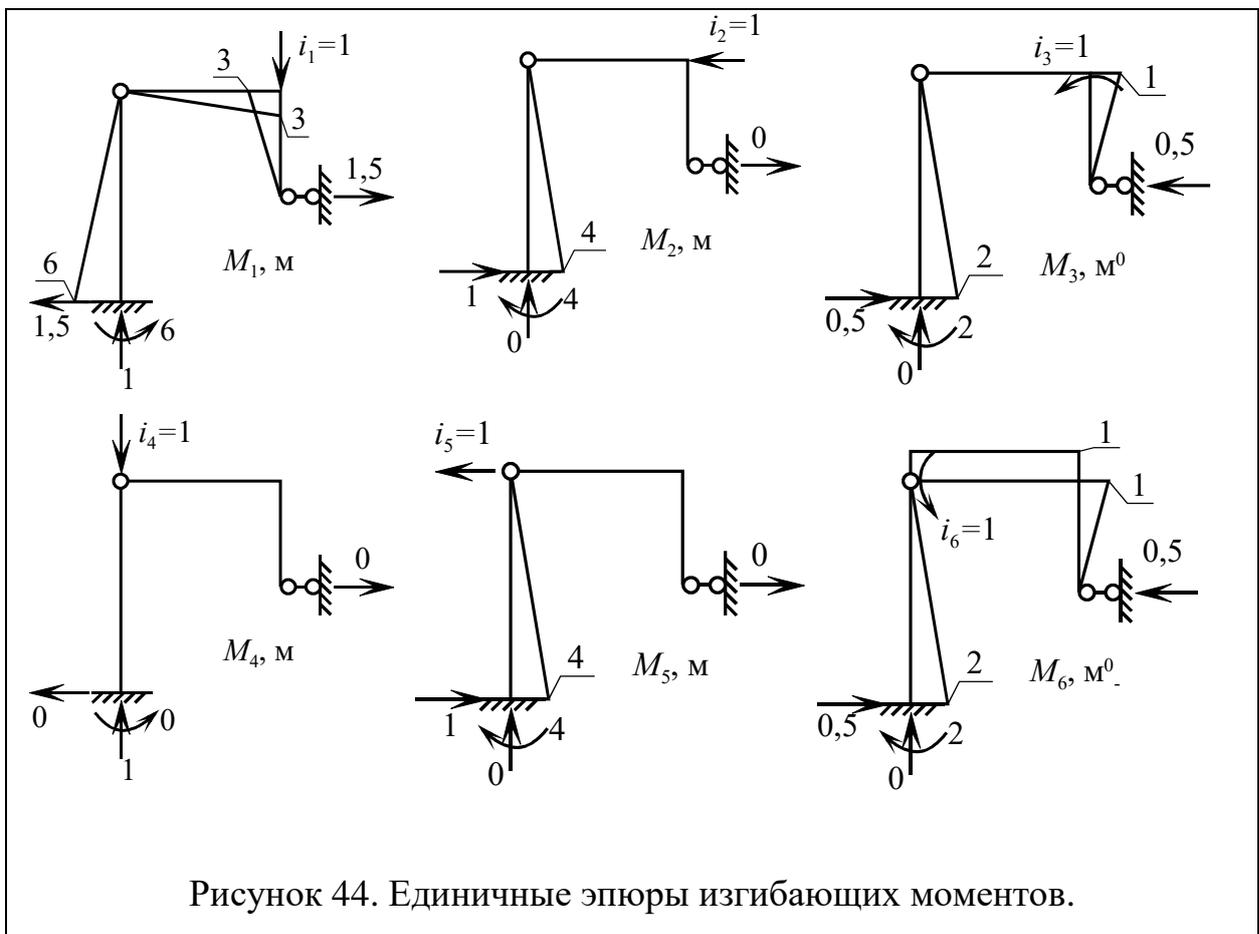
Чтобы найти перемещения, используем интеграл Максвелла-Мора

$$\Delta_{iP} = \int \frac{M_i M_P}{EJ} dx.$$

Для вычисления интеграла применим численное интегрирование - формулу Симпсона. При этом заменим  $EJ_c$  на  $\frac{EJ_p}{1,5}$ .

Перемножая грузовую эпюру с единичными, получим перемещения от нагрузки:

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} = M_1 * M_P &= \frac{4 \cdot 1,5}{6EJ_p} [7 \cdot 6 + 4 \cdot 1 \cdot 3 + 0] + \frac{3}{6EJ_p} [0 + 4 \cdot 7,7 \cdot 1,5 + 6 \cdot 3] + \\ &+ \frac{2 \cdot 1,5}{6EJ_p} [3 \cdot 6 + 4 \cdot 1,5 \cdot 3 + 0] = \frac{103,5}{EJ_p} \end{aligned}$$



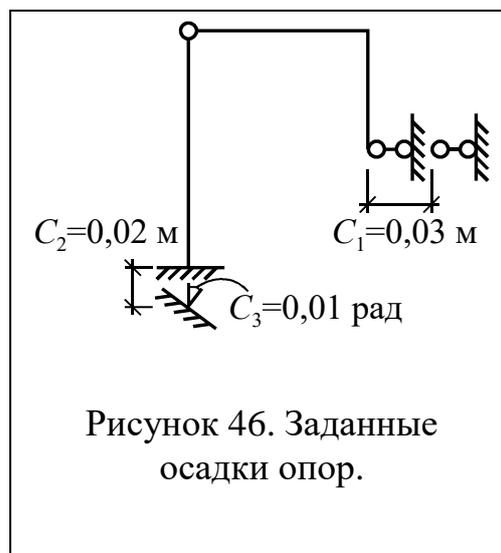
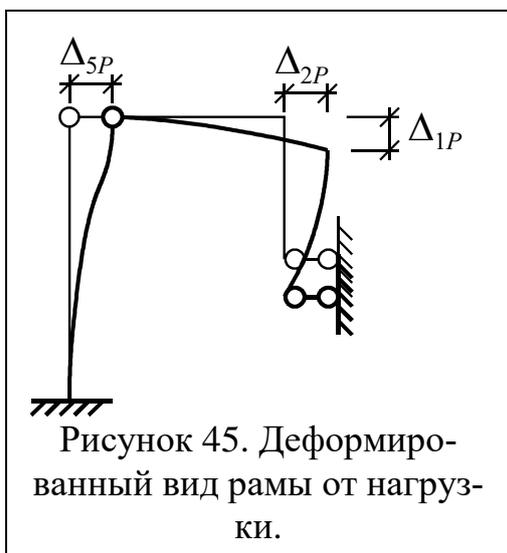
$$\Delta_{2P} = M_2 * M_P = \frac{4 \cdot 1,5}{6EJ_p} \left[ -7 \cdot 4 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{4}{2} + 0 \right] = -\frac{36}{EJ_p}$$

$$\Delta_{3P} = M_3 * M_P = \frac{4 \cdot 1,5}{6EJ_p} \left[ -7 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{2}{2} + 0 \right] + \frac{2 \cdot 1,5}{6EJ_p} \left[ 0 - 4 \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot 1 \right] = -\frac{24}{EJ_p}$$

$$\Delta_{4P} = 0$$

$$\Delta_{5P} = M_5 * M_P = \frac{4 \cdot 1,5}{6EJ_P} \left[ -7 \cdot 4 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{4}{2} + 0 \right] = -\frac{36}{EJ_P}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{6P} = M_6 * M_P &= \frac{4 \cdot 1,5}{6EJ_P} \left[ -7 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{2}{2} + 0 \right] + \frac{3}{6EJ_P} [0 - 4 \cdot 1 \cdot 7,5 - 1 \cdot 6] \\ &+ \frac{2 \cdot 1,5}{6EJ_P} \left[ 0 - 4 \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot 1 \right] = -\frac{42}{EJ_P} \end{aligned}$$



По полученным перемещениям и грузовой эпюре построим деформированный вид рамы (рисунок 45). При построении учитываем, что длины стержней рамы не изменяются.

Заданные осадки опор показаны на рисунке 46. Перемещения, вызванные этими осадками, вычисляются по формуле  $\Delta_{iC} = -\sum_k R_{ki} C_k$ . Для определения перемещений необходимы опорные реакции  $R_{ki}$  по направлениям осадок, вызванные единичными силами (рисунок 44).

$$\begin{aligned} \Delta_{1C} &= -(1,5 \cdot 0,03 - 1 \cdot 0,02 - 6 \cdot 0,01) = 0,075 \text{ м,} \\ \Delta_{2C} &= -(0 \cdot 0,03 + 0 \cdot 0,02 - 4 \cdot 0,01) = -0,04 \text{ м,} \\ \Delta_{3C} &= -(0,5 \cdot 0,03 + 0 \cdot 0,02 + 2 \cdot 0,01) = -0,005 \text{ рад} \\ \Delta_{4C} &= -(0 \cdot 0,03 - 1 \cdot 0,02 + 0 \cdot 0,01) = 0,075 \text{ м,} \\ \Delta_{5C} &= -(0 \cdot 0,03 - 0 \cdot 0,02 - 4 \cdot 0,01) = -0,04 \text{ м,} \\ \Delta_{6C} &= -(0,5 \cdot 0,03 + 0 \cdot 0,02 + 2 \cdot 0,01) = -0,005 \text{ рад} \end{aligned}$$

**Задача 10.** Вычисление перемещений в статически определимой раме от нагрузки и изменения температуры.

Требуется:

1. Построить грузовую и единичные эпюры изгибающих моментов.
2. Вычислить перемещения расчетных сечений от нагрузки (вертикальное, горизонтальное и угол поворота).
3. Изобразить деформированный вид от нагрузки.
4. Построить единичные эпюры продольных сил.
5. Вычислить перемещения расчетных сечений от изменения температуры. Принять коэффициент температурного расширения  $\alpha = 10^{-5} 1/^\circ\text{C}$

Исходные данные принять по таблице 10, расчетная схема выбирается по рисунку 47.

Таблица 10.

Исходные данные к задаче 10.

Алфавит	$q$ , кН/м	$P$ , кН	$\frac{EJ_p}{EJ_c}$	$T_H$ , °C	$T_B$ , °C	$T_0$ , °C	$h_p$ , м	$h_c$ , м	Расчетные сечения
а б в	2	10	1,5	-30	+25	+10	0,5	0,5	$K_1, L_1$
г д е	3	12	2,0	-35	+30	+15	0,4	0,4	$K_2, L_2$
ж з и й	4	15	2,5	-25	+15	+20	0,3	0,3	$K_1, L_1$
к л м	5	18	3	-20	+20	+5	0,2	0,2	$K_2, L_2$
н о п	6	25	3,5	-40	+35	0	0,25	0,25	$K_1, L_1$
р с т	2*	10*	1,5	-30	+25	+10	0,5	0,5	$K_2, L_2$
у ф х	3*	12*	2,0	-35	+30	+15	0,4	0,4	$K_1, L_1$
ц ч ш	4*	15*	2,5	-25	+15	+20	0,3	0,3	$K_2, L_2$
щ ь ы ь	5*	18*	3	-20	+20	+5	0,2	0,2	$K_1, L_1$
э ю я	6*	25*	3,5	-40	+35	0	0,25	0,25	$K_2, L_2$

Примечание: знак (\*) означает, что направление нагрузки следует изменить на противоположное.

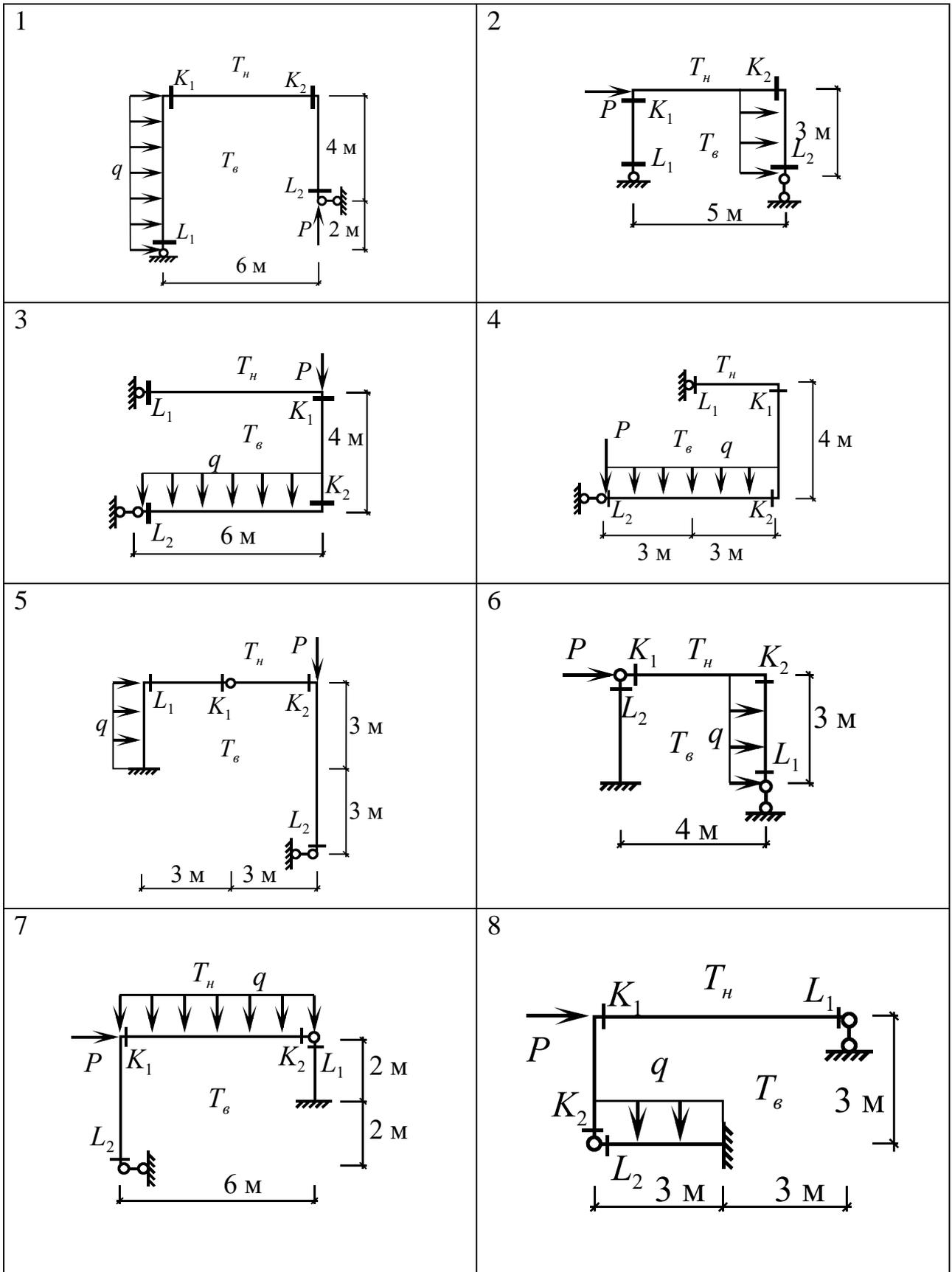


Рисунок 47. Расчетные схемы к задаче 10.

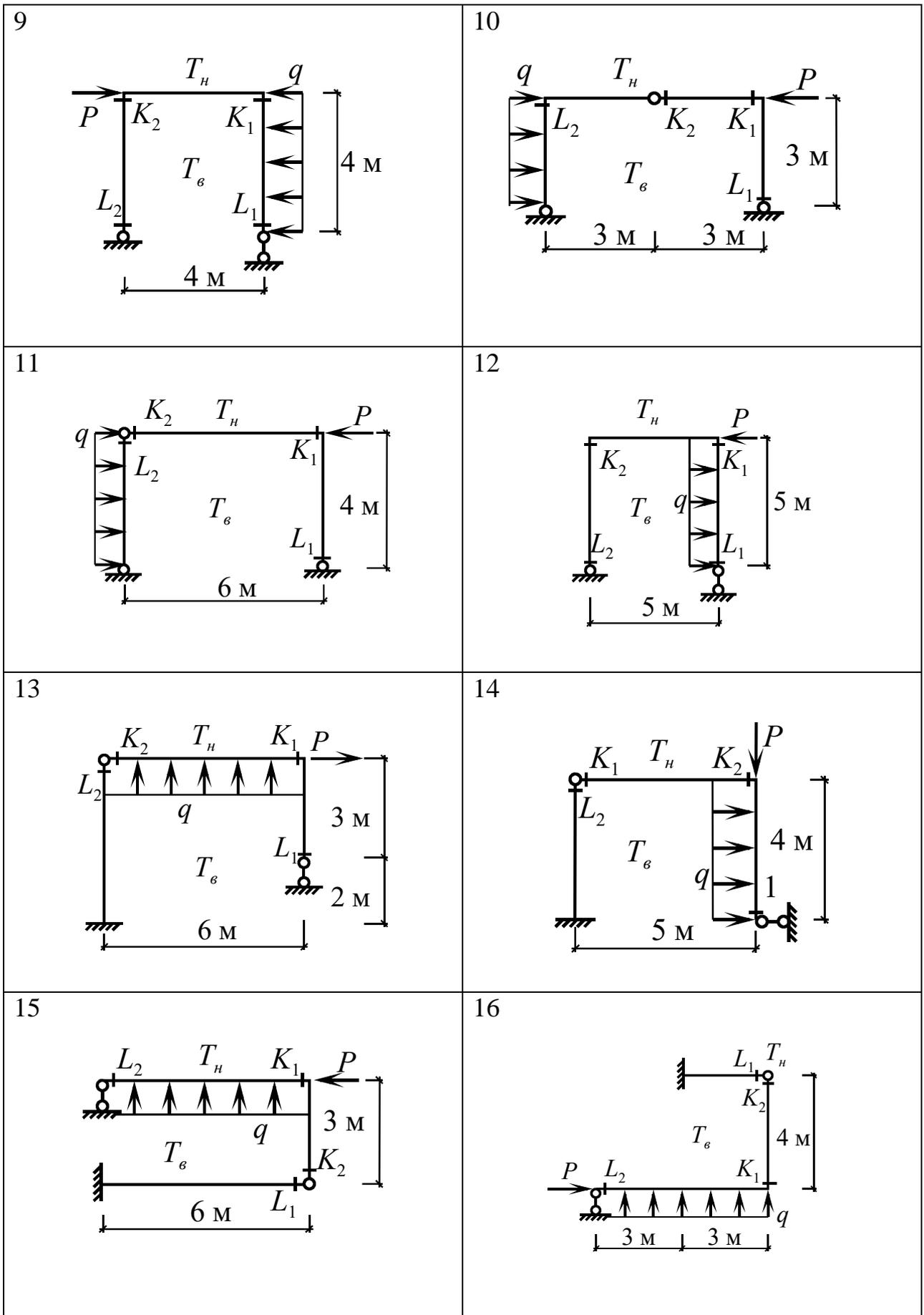


Рисунок 47. Расчетные схемы к задаче 10 (продолжение).

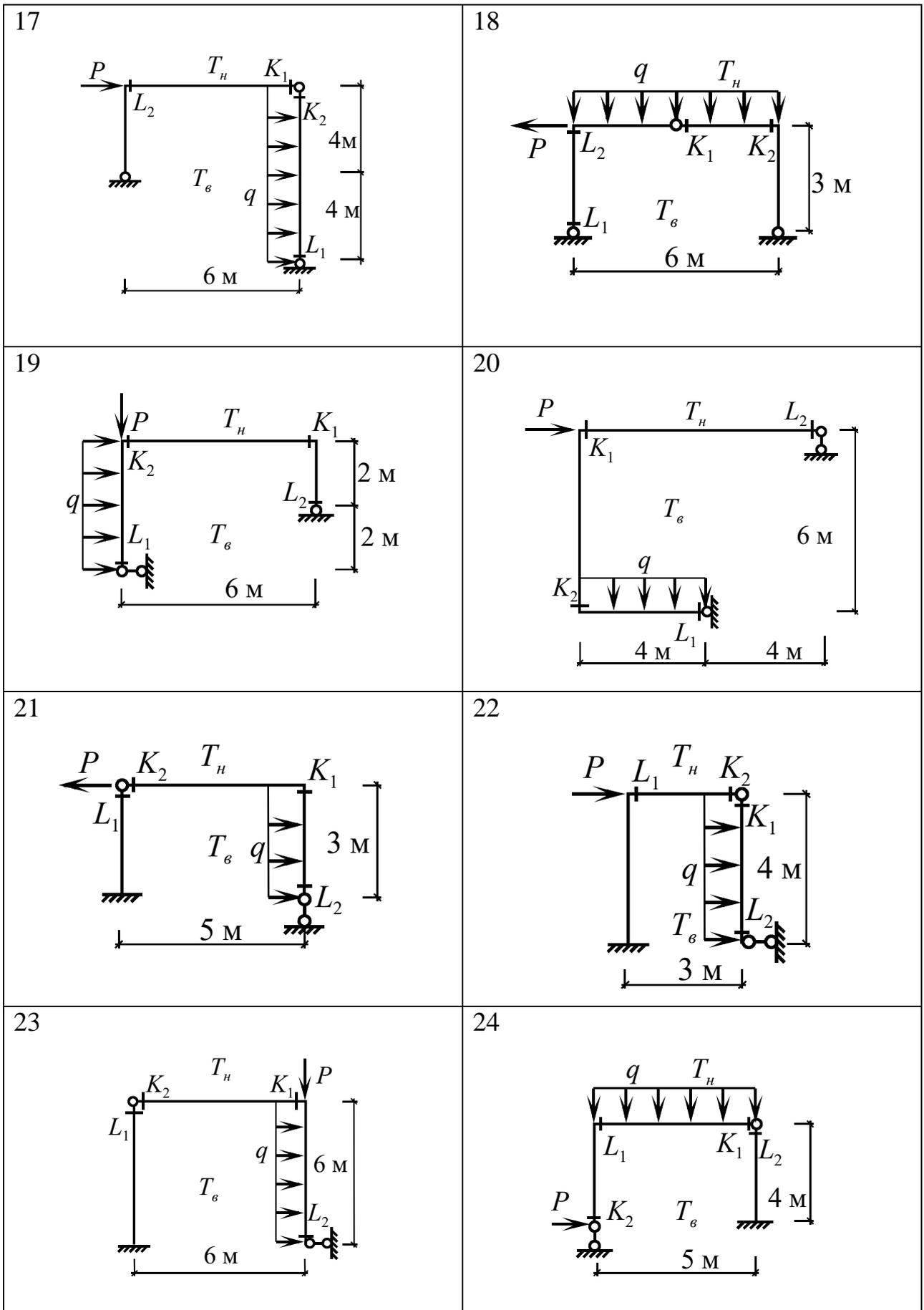


Рисунок 47. Расчетные схемы к задаче 10 (продолжение).

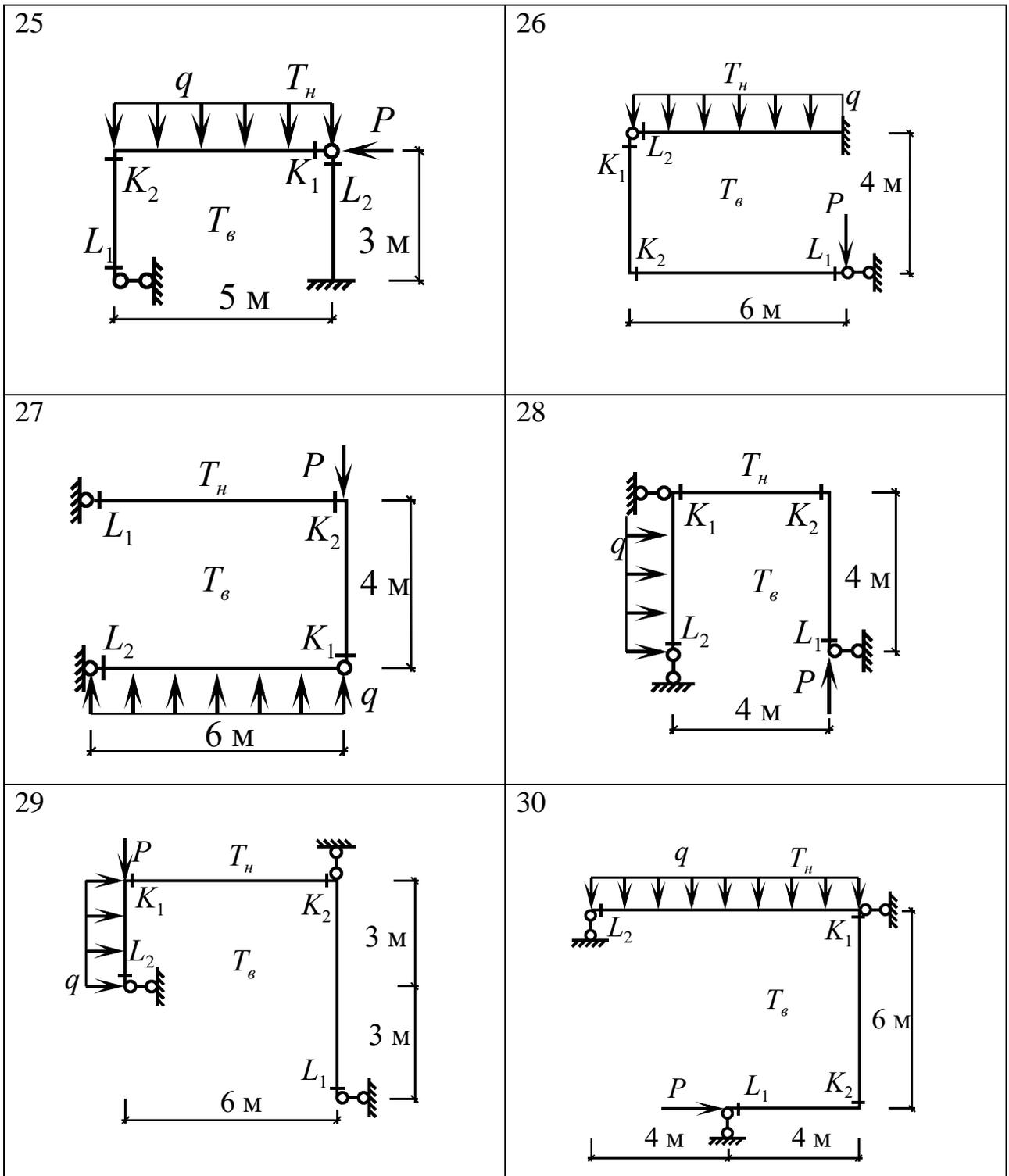
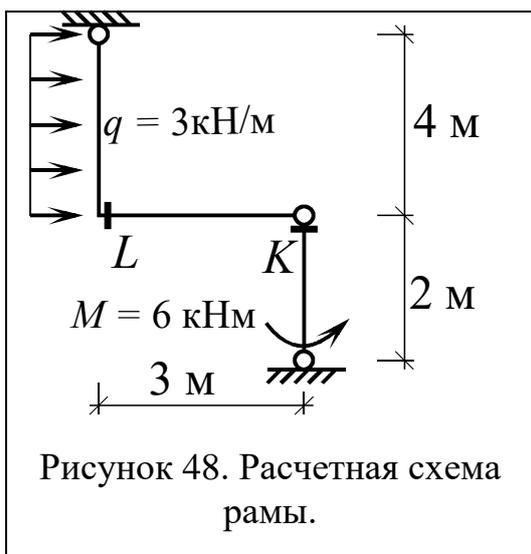


Рисунок 47. Расчетные схемы к задаче 10 (окончание).

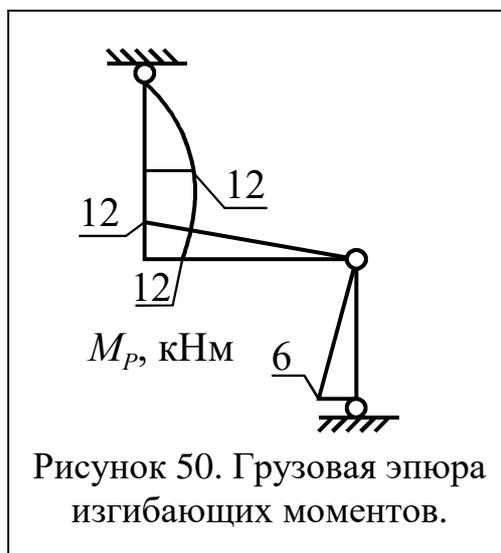
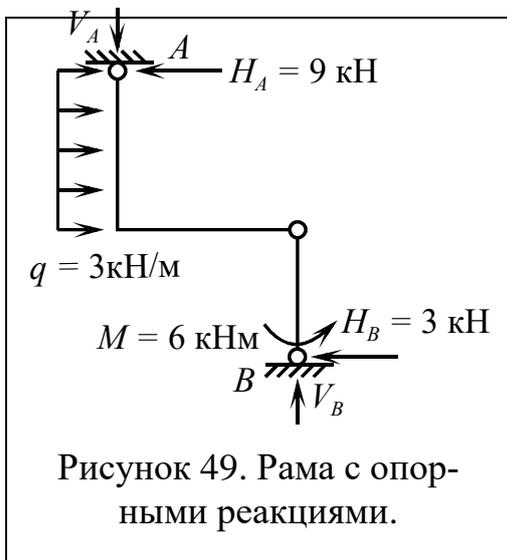


### Пример

Для заданной рамы (рисунок 48) требуется найти вертикальное, горизонтальное перемещения и угол поворота сечений  $K$  и  $L$  от нагрузки и от изменения температуры.  $J_P/J_C = 1,5$ .

Для вычисления перемещений от нагрузки необходимо построить грузовую эпюру изгибающих моментов. Чтобы по-

строить эпюру найдем опорные реакции (рисунок 49).



Из уравнения  $\sum M_K^{HИЗ} = 0$  получим реакцию  $H_B = 3 \text{ кН}$ , из  $\sum F_x = 0$  найдем  $H_A = 9 \text{ кН}$ . Вертикальные реакции в точках  $A$  и  $B$  для построения эпюры не требуются. Грузовая эпюра  $M_P$  показана на рисунке 50.

Далее необходимо построить эпюры изгибающих моментов от единичных сил, приложенных по направлению искомым перемещений заданных сечений (рисунок 51).

Перемножая грузовую эпюру с единичными получим перемещения от нагрузки:

$$\Delta_{1P} = 0$$

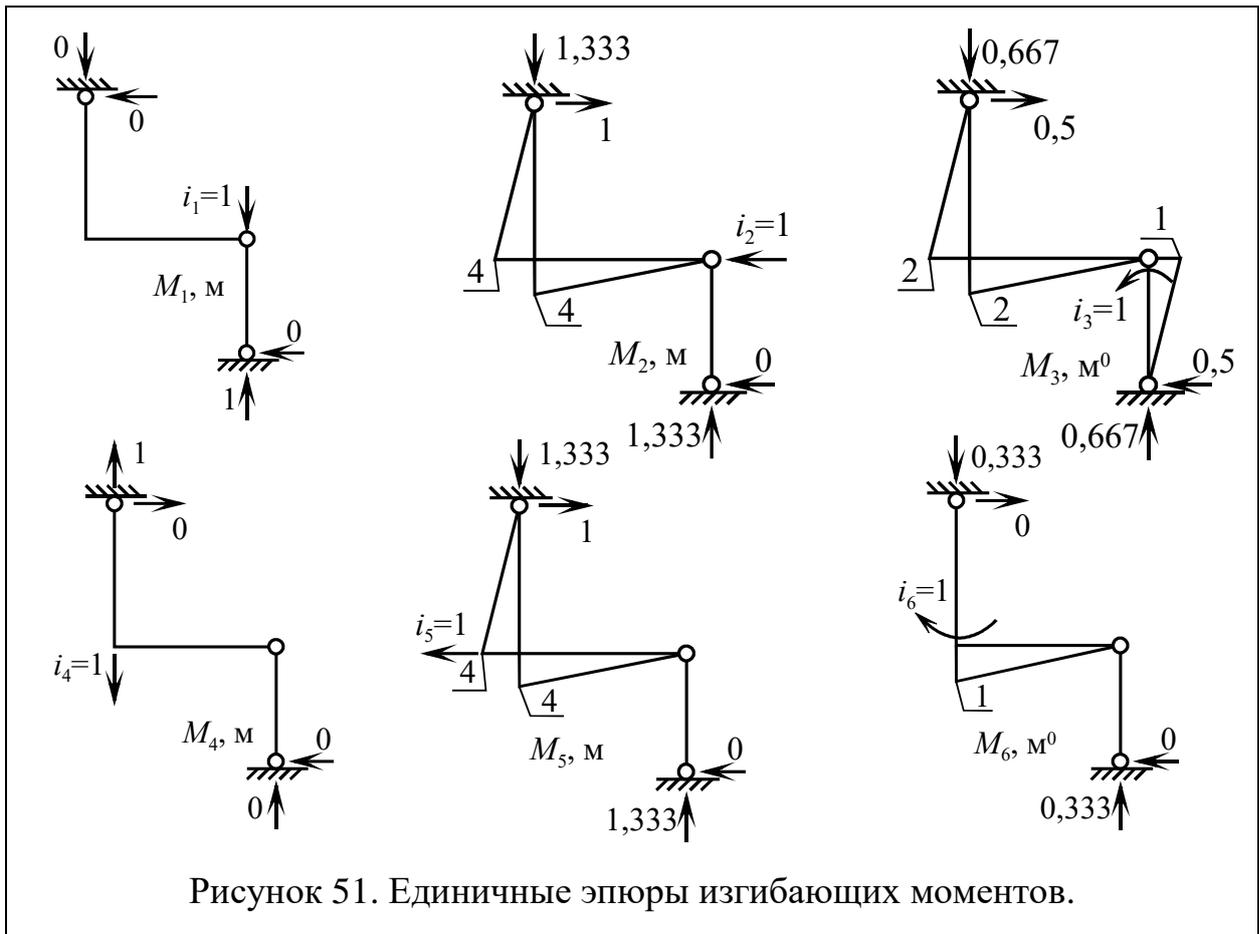


Рисунок 51. Единичные эпюры изгибающих моментов.

$$\Delta_{2P} = M_2 * M_P = \frac{4 \cdot 1,5}{6EJ_P} \left[ 0 - 12 \cdot 4 - 4 \cdot 12 \cdot \frac{4}{2} \right] + \frac{3}{6EJ_P} \left[ -12 \cdot 4 - 4 \cdot \frac{12}{2} \cdot \frac{4}{2} \right] = -\frac{174}{EJ_P}$$

$$\Delta_{3P} = M_3 * M_P = \frac{4 \cdot 1,5}{6EJ_P} \left[ 0 - 4 \cdot 12 \cdot 1 - 12 \cdot 2 \right] + \frac{3}{6EJ_P} \left[ -2 \cdot 12 - 4 \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{12}{2} - 0 \right] +$$

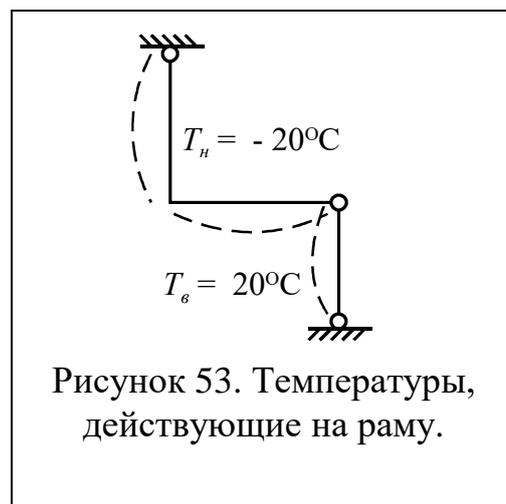
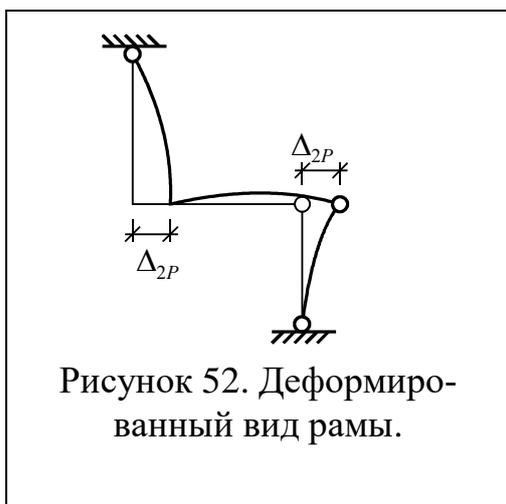
$$+ \frac{2 \cdot 1,5}{6EJ_P} \left[ 0 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{2} + 0 \right] = -\frac{69}{EJ_P}$$

$$\Delta_{4P} = 0$$

$$\Delta_{5P} = M_5 * M_P = \frac{4 \cdot 1,5}{6EJ_P} \left[ 0 - 12 \cdot 4 - 4 \cdot 12 \cdot \frac{4}{2} \right] + \frac{3}{6EJ_P} \left[ -12 \cdot 4 - 4 \cdot \frac{12}{2} \cdot \frac{4}{2} \right] = -\frac{174}{EJ_P}$$

$$\Delta_{6P} = M_6 * M_P = \frac{3}{6EJ_P} \left[ 0 - 4 \cdot 0,5 \cdot 6 + 0 \right] = -\frac{6}{EJ_P}$$

Используя найденные перемещения и эпюру моментов, построим деформированный вид (рисунок 52). При построении учитываем, что длины стержней рамы не изменяются.



Перемещения от изменения температуры вычисляются по формуле:

$$\Delta_{it} = \alpha \left( \sum \frac{\Delta t_1 - \Delta t_2}{h} \omega_M + \sum \Delta t_{OC} \omega_N \right).$$

Здесь  $\alpha$  - коэффициент температурного расширения,  $h$  - высота сечения,  $\Delta t_1$ ,  $\Delta t_2$  - изменение температуры крайних волокон стержня, и  $\Delta t_{OC}$  - изменение температуры волокна, лежащего на нейтральной оси.

В рассматриваемой раме  $\alpha = 10^{-5} 1/^\circ C$ , высота сечения для ригеля и стоек  $h_P = 0,2$  м и  $h_C = 0,1$  м соответственно, температура возведения сооружения  $T_0 = -10^\circ C$ . Температурное воздействие на раму показано на рисунке 53. Найдем изменение температуры наружных волокон, внутренних волокон, и волокон, лежащих на нейтральной оси:

$$\Delta t_H = T_H - T_0 = -20 - (-10) = -10^\circ C,$$

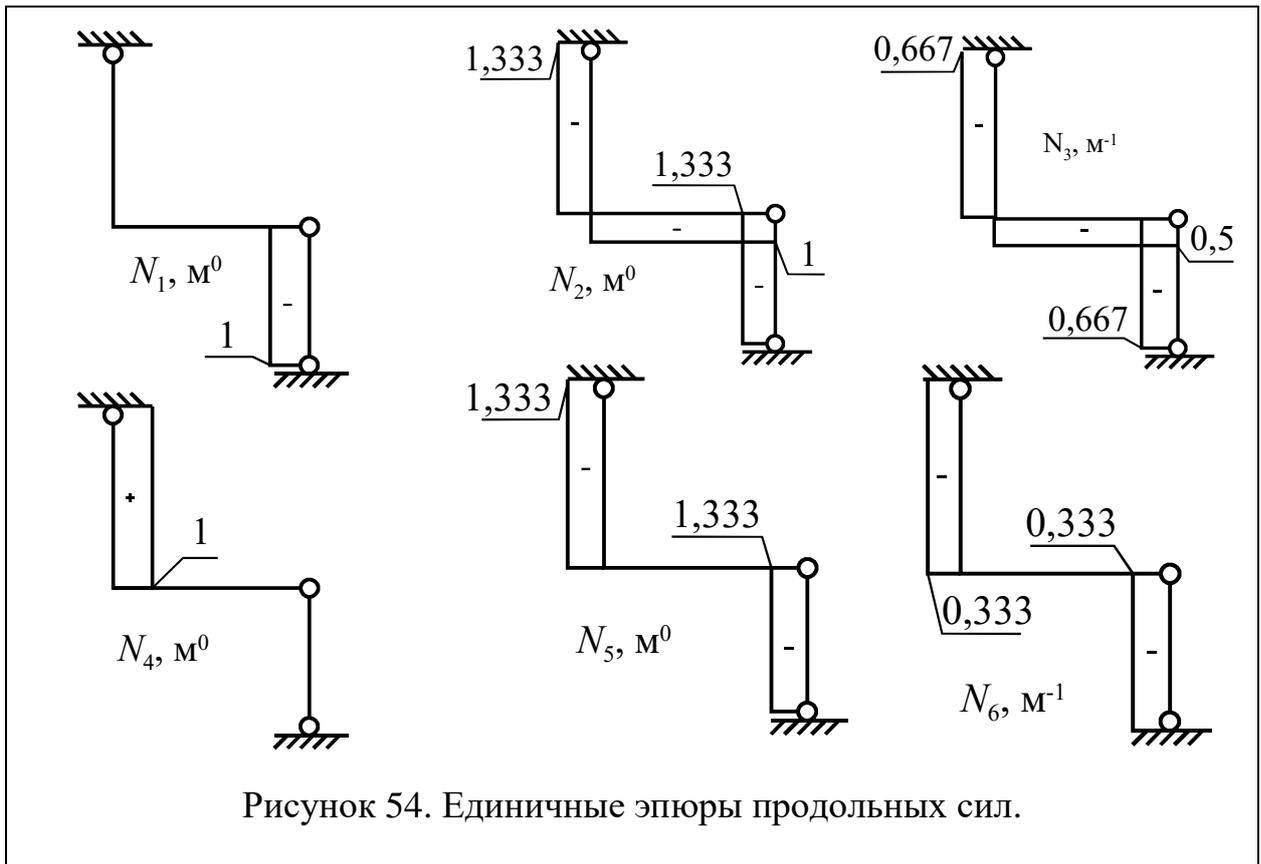
$$\Delta t_C = T_C - T_0 = 20 - (-10) = 30^\circ C,$$

$$\Delta t_{OC} = \frac{\Delta t_C + \Delta t_H}{2} = \frac{30 - 10}{2} = 10^\circ C.$$

Для вычисления перемещений от изменения температуры необходимы единичные эпюры продольных сил (рисунок 54). Единичные нагружения и опорные реакции, необходимые для их построения, взяты с рисунка 51.

$$\Delta_{1t} = 10^{-5} \cdot [0 + 10 \cdot (-1 \cdot 2)] = -20 \cdot 10^{-5} \text{ м},$$

$$\Delta_{2t} = 10^{-5} \cdot \left[ \frac{|30 - (-10)|}{0,1} \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} + \frac{|30 - (-10)|}{0,2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} + \right]$$



$$+10 \cdot (-1,333 \cdot 4) + 10 \cdot (-1 \cdot 3) + 10 \cdot (-1,333 \cdot 2)] = 4290 \cdot 10^{-5} \text{ м},$$

$$\Delta_{3t} = 10^{-5} \cdot \left[ \frac{|30 - (-10)|}{0,1} \cdot \frac{2 \cdot 4}{2} + \frac{|30 - (-10)|}{0,2} \cdot \frac{2 \cdot 3}{2} - \frac{|30 - (-10)|}{0,1} \cdot \frac{1 \cdot 2}{2} + \right.$$

$$\left. + 10 \cdot (-0,667 \cdot 4) + 10 \cdot (-0,5 \cdot 3) + 10 \cdot (-0,667 \cdot 2) \right] = 1730 \cdot 10^{-5} \text{ рад},$$

$$\Delta_{4t} = 10^{-5} \cdot [0 + 10 \cdot (1 \cdot 4)] = 40 \cdot 10^{-5} \text{ м},$$

$$\Delta_{5t} = 10^{-5} \cdot \left[ \frac{|30 - (-10)|}{0,1} \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} + \frac{|30 - (-10)|}{0,2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} + \right.$$

$$\left. + 10 \cdot (-1,333 \cdot 4) + 10 \cdot (0 \cdot 3) + 10 \cdot (-1,333 \cdot 2) \right] = 4320 \cdot 10^{-5} \text{ м},$$

$$\Delta_{6t} = 10^{-5} \cdot \left[ 0 + \frac{|30 - (-10)|}{0,2} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2} + 0 + \right.$$

$$\left. + 10 \cdot (-0,333 \cdot 4) + 0 + 10 \cdot (-0,333 \cdot 2) \right] = 280 \cdot 10^{-5} \text{ рад}.$$

**Задача 11.** Расчет статически неопределимой рамы методом сил на действие нагрузки и осадки опор.

Требуется:

1. Определить количество лишних связей и выбрать основную систему.
2. Построить единичные и грузовую эпюры изгибающих моментов.
3. Построить окончательные эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил и выполнить деформационную проверку по новой основной системе и проверить равновесие рамы.
4. Найти угол поворота сечения  $K$  (отдельно от нагрузки и осадки опор).

Исходные данные принять по таблице 11, расчетная схема выбирается по рисунку 55.

Таблица 11

Исходные данные к задаче 11.

Алфавит	$q$ , кН/м	$m$ , кНм	$\frac{EJ_p}{EJ_c}$	$EJ_p$ , кНм <sup>2</sup>	$C_1$ , (для линейных – м, для угловых – рад)	$C_2$ , (для линейных – м, для угловых – рад)
а б в	2	20	1,25	3000	0,01	0,01
г д е	3	25	1,5	4500	0,03	0,03
ж з и й	4	30	1,75	6000	0,06	0,06
к л м	6	45	2,0	7500	0,09	0,09
н о п	8	15	2,5	9000	0,12	0,12
р с т	2*	20*	1,25	3000	0,01*	0,01*
у ф х	3*	25*	1,5	4500	0,03*	0,03*
ц ч ш	4*	30*	1,75	6000	0,06*	0,06*
щ ь ы ь	6*	45*	2,0	7500	0,09*	0,09*
э ю я	8*	15*	2,5	9000	0,12	0,12*

Примечание: знак (\*) означает, что направление нагрузки следует изменить на противоположное.

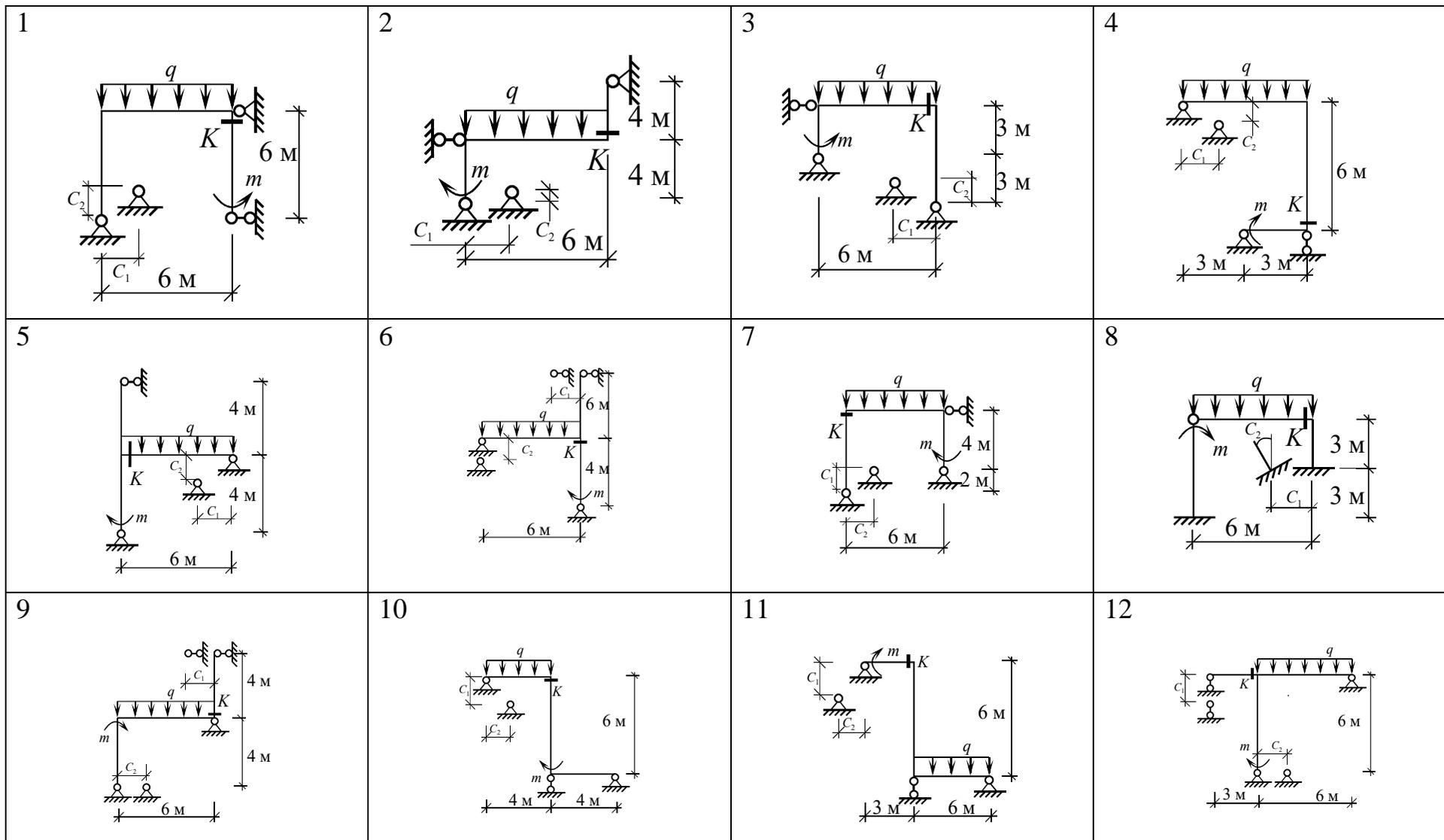


Рисунок 55. Расчетные схемы к задаче 11.

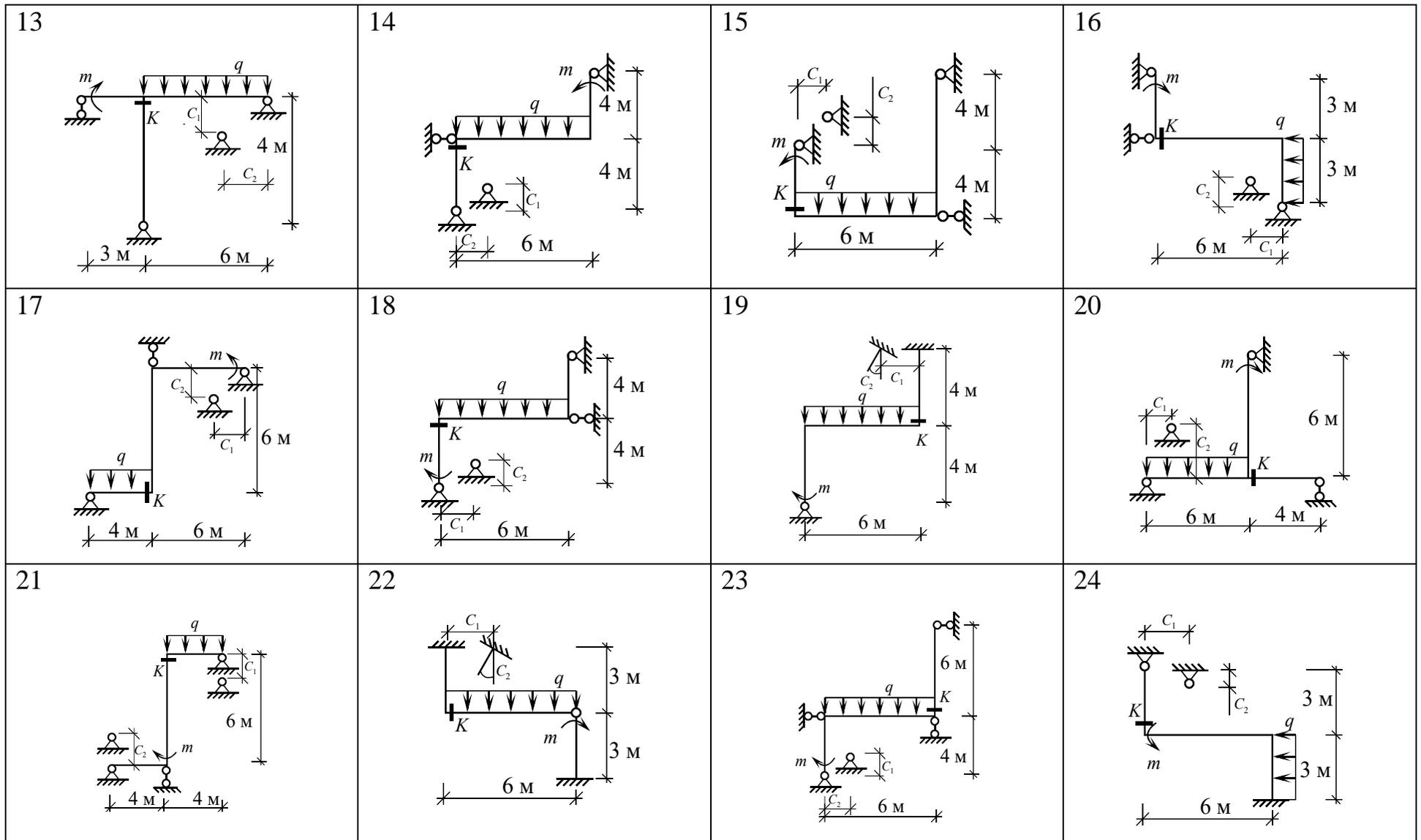


Рисунок 55. Расчетные схемы к задаче 11 (продолжение).

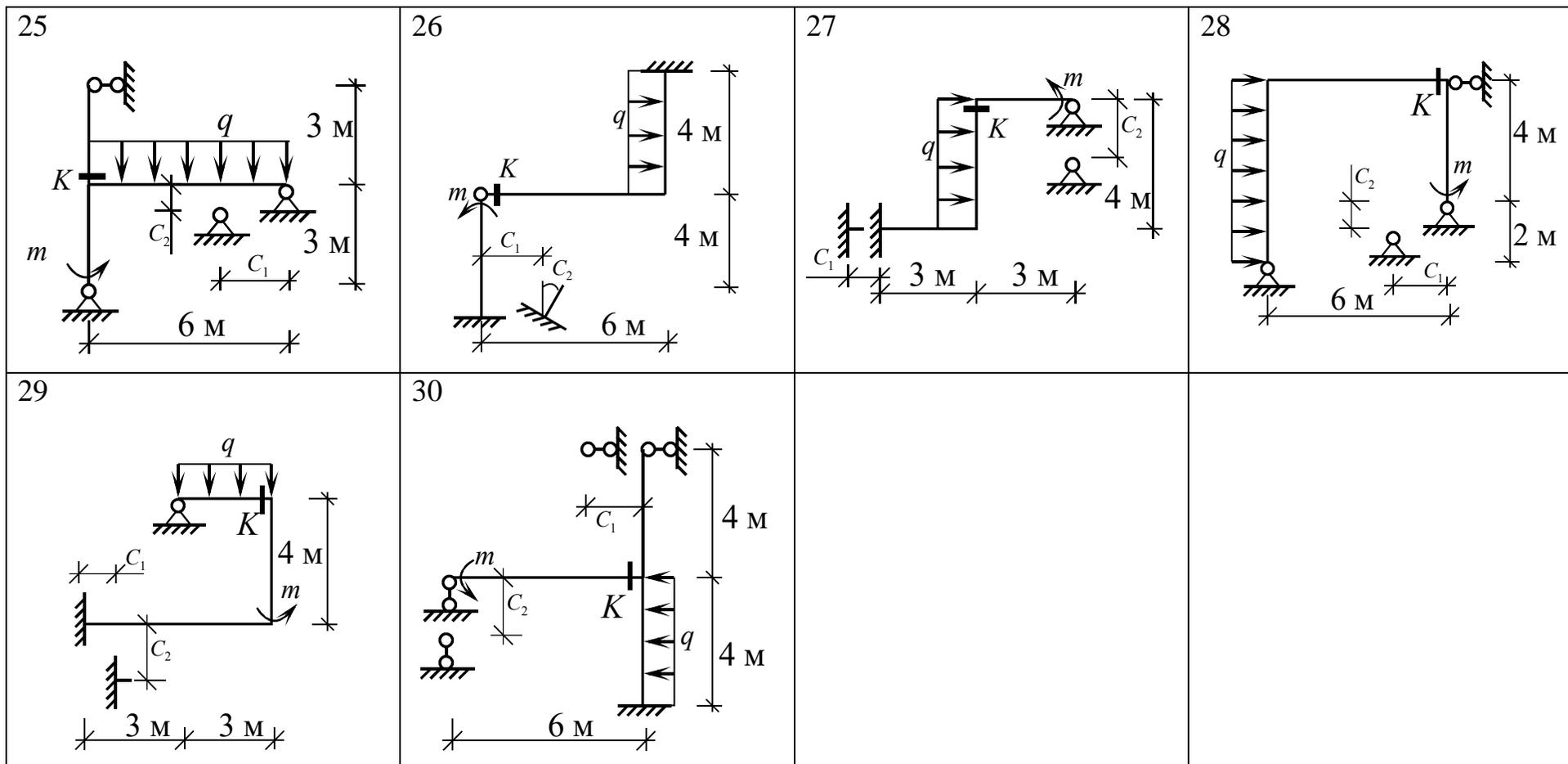


Рисунок 55. Расчетные схемы к задаче 11 (окончание).

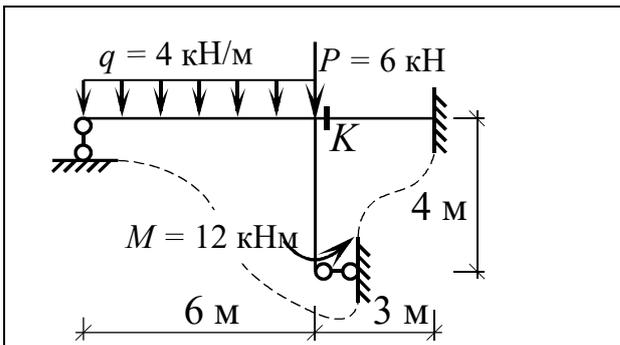


Рисунок 56. Расчетная схема рамы.

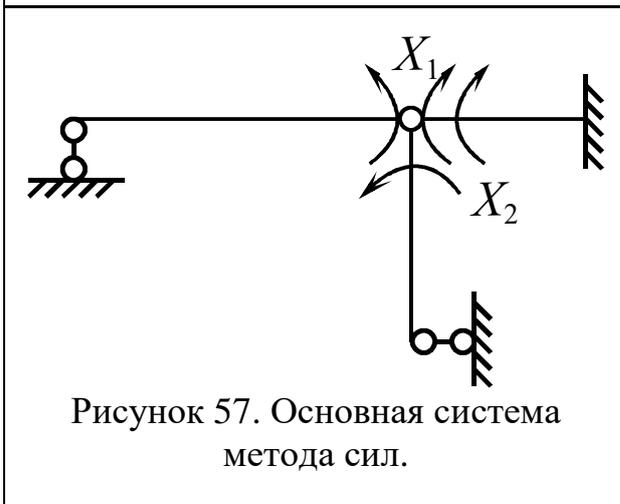


Рисунок 57. Основная система метода сил.

### Пример

Рассмотрим раму, показанную на рисунке 56. Примем отношение жесткостей ригеля и стойки  $J_P/J_C = 1,5$ .

Для выбора основной системы необходимо найти количество «лишних» связей:

$$L = 3K - III = 3 \cdot 2 - 4 = 2.$$

Здесь  $K$  – количество замкнутых контуров,  $III$  – количество простых шарниров.

Основную систему метода сил получим, врезая двойной шарнир в жесткий узел (рисунок 57). Система канонических уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} = 0 \end{cases}$$

где  $\delta_{ij}$  и  $\Delta_{ip}$  – единичные и грузовые коэффициенты.

Для вычислений коэффициентов системы необходимо построить единичные и грузовую эпюры изгибающих моментов (рисунки 58 и 59).

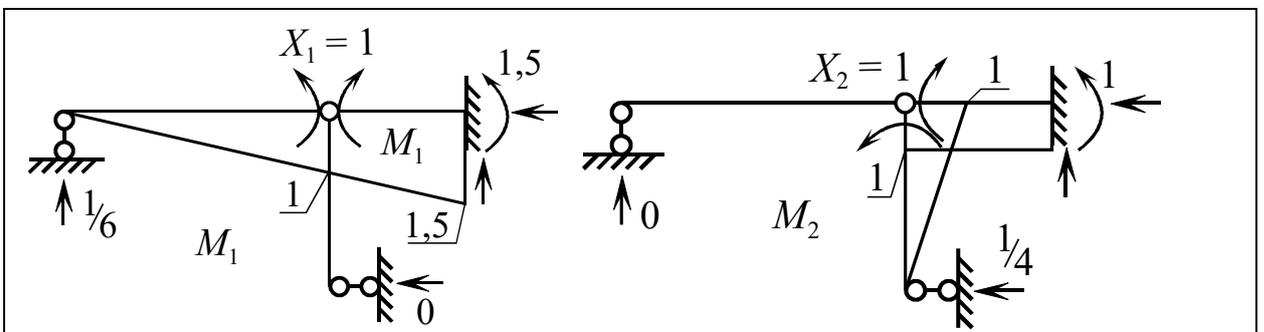
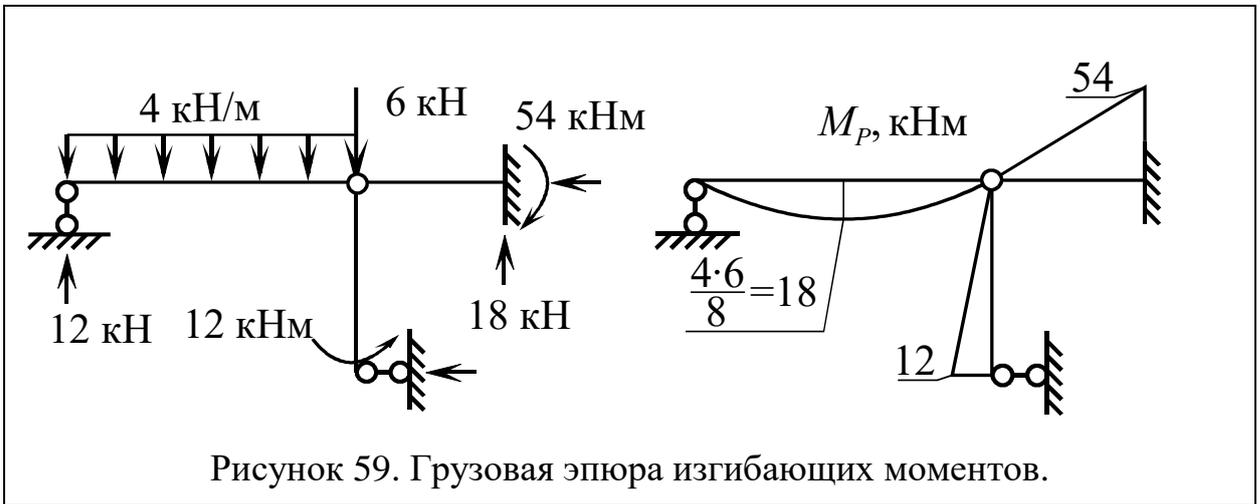


Рисунок 58. Единичные эпюры изгибающих моментов.



Перемножая эпюры с использованием формулы Симпсона и правила Верещагина, получим

$$EJ_P \delta_{11} = [M_1 * M_1] = \frac{1,5 \cdot 9}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 = 6,75 \text{ м}$$

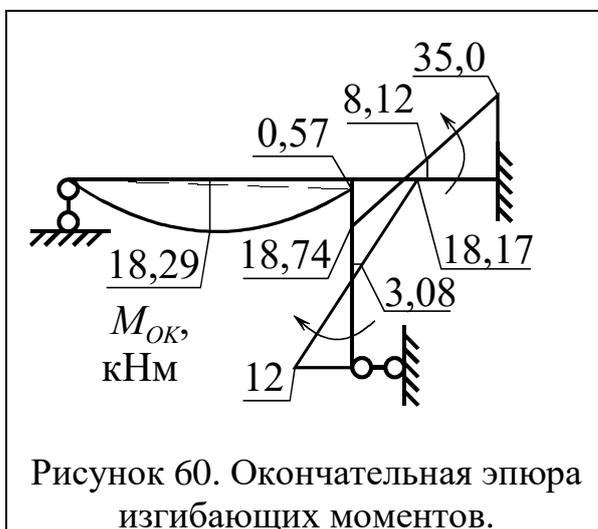
$$EJ_P \delta_{22} = [M_2 * M_2] = 1,5 \cdot \frac{1 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 1 = 5 \text{ м}$$

$$EJ_P \delta_{12} = EJ_P \delta_{21} = [M_1 * M_2] = 3 \cdot 1 \cdot \frac{1+1,5}{2} = 3,75 \text{ м}$$

$$EJ_P \Delta_{1P} = [M_1 * M_P] = \frac{6}{6} \left[ 0 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 18 + 0 \right] +$$

$$+ \frac{3}{6} \left[ 0 - 4 \cdot \frac{54}{2} \cdot \frac{1+1,5}{2} - 1,5 \cdot 54 \right] = -72 \text{ кНм}^2$$

$$EJ_P \Delta_{2P} = [M_2 * M_P] = -1,5 \cdot \frac{1 \cdot 4}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 12 - 1 \cdot 3 \cdot \frac{54}{2} = -93 \text{ кНм}^2$$



Решаем систему канонических уравнений:

$$\begin{cases} 6,75X_1 + 3,75X_2 - 72 = 0 \\ 3,75X_1 + 5X_2 - 93 = 0 \end{cases}$$

$$X_1 = 0,57 \text{ кНм}, \quad X_2 = 18,17 \text{ кНм.}$$

Используя гипотезу о независимости действия сил, получаем окончательную эпюру изгибающих мо-

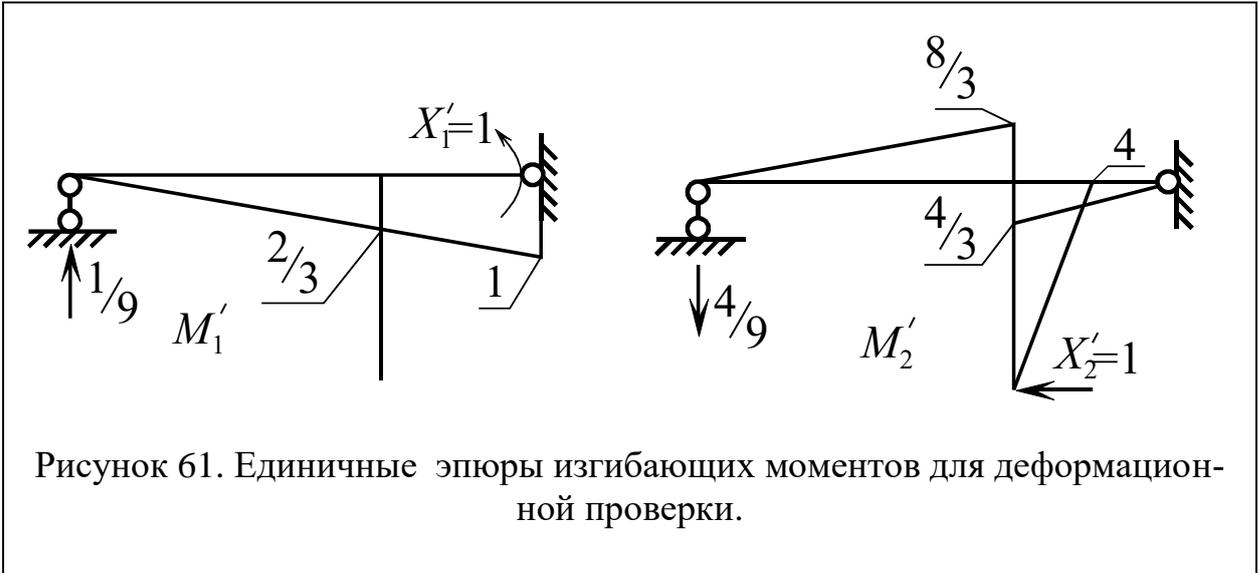


Рисунок 61. Единичные эпюры изгибающих моментов для деформационной проверки.

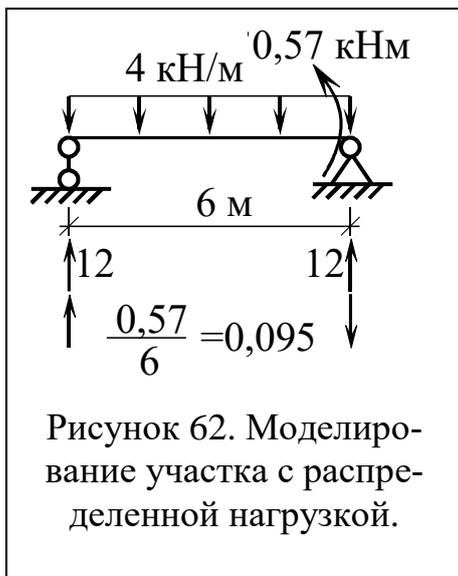
ментов  $M_{OK} = M_1 X_1 + M_2 X_2 + M_P$  (рисунок 60). Выполним деформационную проверку. Для этого выберем новую основную систему, построим единичные эпюры, и перемножаем их с окончательной эпюрой. Если окончательная эпюра верна, то результат должен быть нулевым. Новые единичные эпюры показаны на рисунке 61.

Выполняем проверку:

$$EJ_P [M'_1 * M_{OK}] = \frac{6}{6} \left[ 0 + 4 \cdot 18,29 \cdot \frac{1}{3} + 0,57 \cdot \frac{2}{3} \right] + \frac{3}{6} \left[ 18,74 \cdot \frac{2}{3} - 4 \cdot \frac{1 + \frac{2}{3}}{2} \cdot 8,12 - 1 \cdot 35,0 \right] = 31,01 - 31,03 = -0,02 \approx 0$$

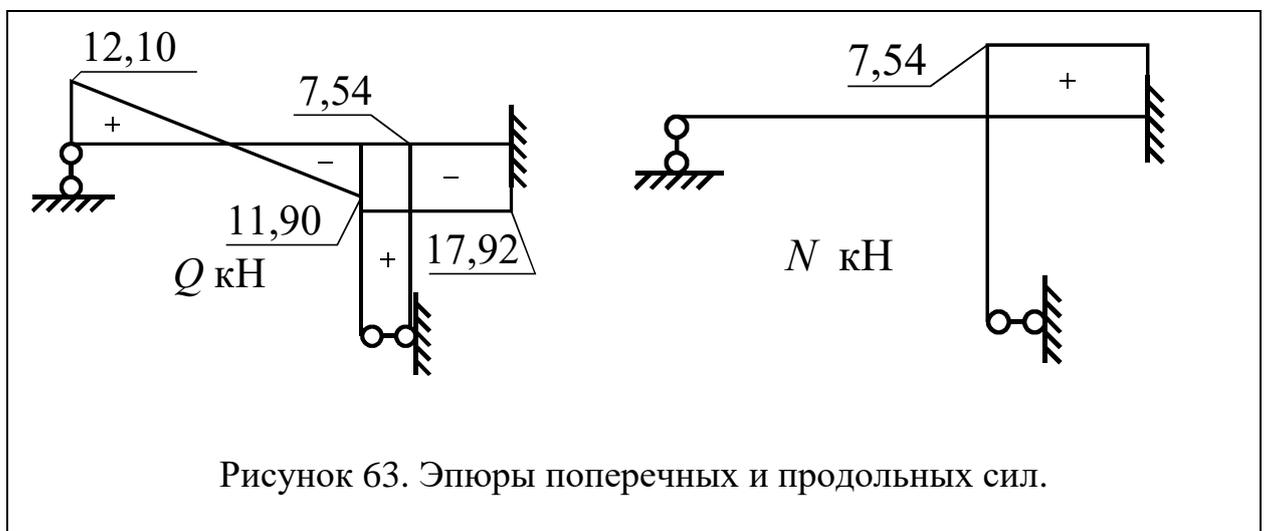
$$EJ_P [M'_2 * M_{OK}] = \frac{6}{6} \left[ 0 - 4 \cdot 18,29 \cdot \frac{4}{3} - 0,57 \cdot \frac{8}{3} \right] + \frac{3}{6} \left[ 18,74 \cdot \frac{4}{3} - 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8,12 + 0 \right] + 1,5 \cdot \frac{4}{6} [0 + 4 \cdot 3,08 \cdot 2 + 18,17 \cdot 4] = 109,81 - 109,89 = -0,08 \approx 0$$

Для построения эпюры поперечных сил используем дифференциальное соотношение  $Q = dM/dx$ . На участках с прямолинейной эпюрой моментов поперечная сила равна тангенсу угла наклона эпюры  $M$ .



Знак поперечной силы определяется по направлению поворота эпюры к стержню – если эпюра  $M$  поворачивается по ходу часовой стрелки, то  $Q > 0$ .

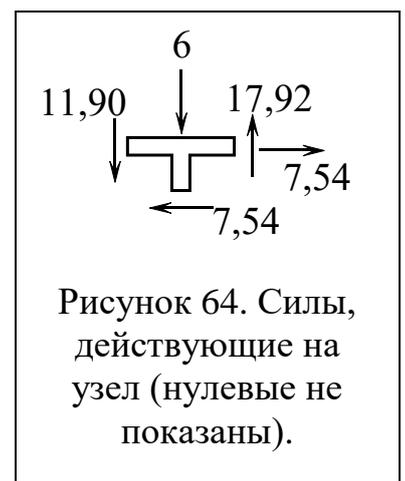
На правом ригеле получим  $Q = -\frac{35 + 18,74}{3} = -17,92$  кН, на стойке находим  $Q = \frac{12 + 18,17}{4} = 7,54$  кН.



На участке, где есть распределенная нагрузка, поперечные силы получим, моделируя этот участок балкой на двух опорах (рисунок 62).

По этим данным построим эпюру  $Q$  (рисунок 63). Далее используя условие равновесия узла (рисунок 64) найдем продольные силы. Полученная эпюра  $N$  также показана на рисунке 63.

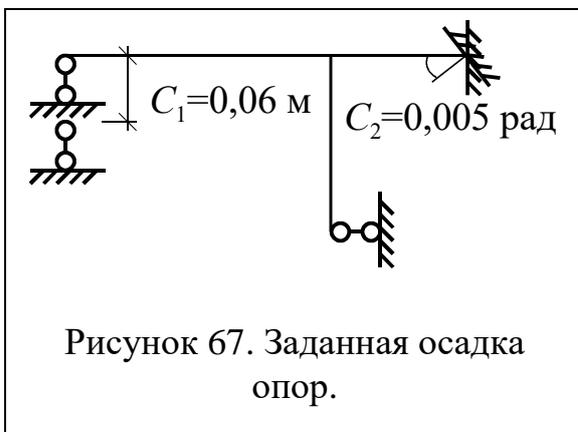
После построения эпюр поперечных и продольных сил найдем опорные реакции, которые, численно равны соответствующим внутренним усилиям в опорных сечениях рамы. Проверим равновесие (рисунок 65):



$$\sum F_x = 7,54 - 7,54 = 0,$$

$$\sum F_y = 12,095 + 17,92 - 24 - 6 = 30,015 - 30 = 0,015 \approx 0,$$

$$\sum M_A = 12,095 \cdot 9 - 24 \cdot 6 - 6 \cdot 3 - 12 + 7,54 \cdot 4 + 35,0 = 174,015 - 174 = 0,015 \approx 0.$$



Найдем угол поворота сечения К. Для этого в любой основной системе метода сил в сечение К приложим единичный момент и построим единичную эпюру изгибающих моментов (рисунок 66). Перемножив ее с окончательной получим искомое перемещение:

$$\Delta_{iP} = M_{OK} * M_i = \frac{3}{6EJ_P} [18,74 \cdot 1 - 4 \cdot 8,12 \cdot 1 - 35 \cdot 1] = -\frac{24,36}{EJ_P}$$

Выполним расчет рамы на осадку опор, заданную на рисунке 67. Жесткость ригеля

$$EJ_P = 10^4 \text{ кНм}^2.$$

Вычислим новые грузовые коэффициенты, используя опорные реакции, взятые с единичных эпюр (рисунок 58):

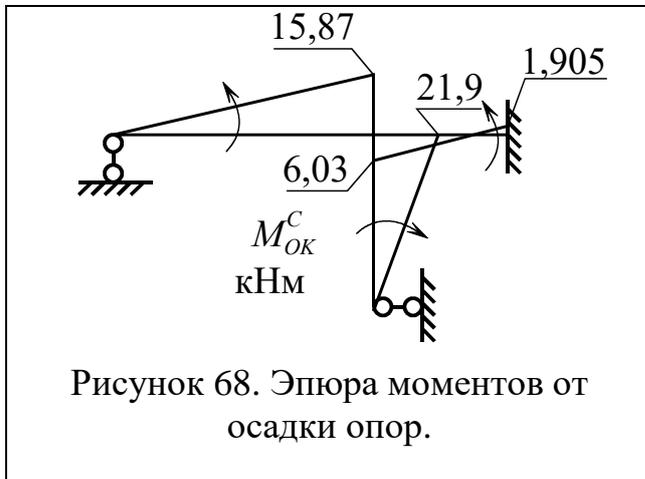
$$EJ_P \Delta_{1C} = -EJ_P \sum R_{k1} C_k = -10^4 \cdot \left( -\frac{1}{6} \cdot 0,06 + 1,5 \cdot 0,005 \right) = 25,0 \text{ кНм}^2$$

$$EJ_P \Delta_{2C} = -EJ_P \sum R_{k2} C_k = -10^4 \cdot (-0 \cdot 0,06 + 1 \cdot 0,005) = -50,0 \text{ кНм}^2$$

Решаем систему уравнений с этими грузовыми коэффициентами:

$$\begin{cases} 6,75X_1 + 3,75X_2 + 25 = 0 \\ 3,75X_1 + 5X_2 - 50 = 0 \end{cases}$$

$$X_1 = -15,87 \text{ кНм} \quad X_2 = 21,9 \text{ кНм}$$



Построим окончательную эпюру изгибающих моментов от осадки опор. В отличие от расчета на действие внешней нагрузки, при осадке нет грузовой эпюры:  $M_{ок} = M_1 X_1 + M_2 X_2$ . Построенная эпюра показана на рисунке 68.

Выполним деформационную проверку. При осадке опор деформационная проверка дает не ноль, а величину грузового коэффициента с обратным знаком. Поэтому сначала вычислим грузовые коэффициенты в новой основной системе (рисунок 61):

$$EJ_P \Delta'_{1C} = -10^4 \cdot \left( -\frac{1}{9} \cdot 0,06 + 1 \cdot 0,005 \right) = 16,67 \text{ кНм}^2$$

$$EJ_P \Delta'_{2C} = -10^4 \cdot \left( \frac{4}{9} \cdot 0,06 + 0 \cdot 0,005 \right) = -266,7 \text{ кНм}^3$$

Перемножим единичные эпюры с окончательной:

$$EJ_P [M_{ок}^C * M_1'] = -\frac{15,87 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{6} \left[ 6,03 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot \frac{6,03 - 1,905}{2} \cdot \frac{\frac{2}{3} + 1}{2} - 1,905 \cdot 1 \right] = -16,67 = -EJ_P \Delta'_{1C}$$

$$EJ_P [M_{ок}^C * M_2'] = \frac{15,87 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{3} + \frac{3}{6} \left[ 6,03 \cdot \frac{4}{3} + 4 \cdot \frac{6,03 - 1,905}{2} \cdot \frac{4}{6} + 0 \right] + 1,5 \cdot \frac{21,9 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = 266,6 \cong -EJ_P \Delta'_{2C}$$

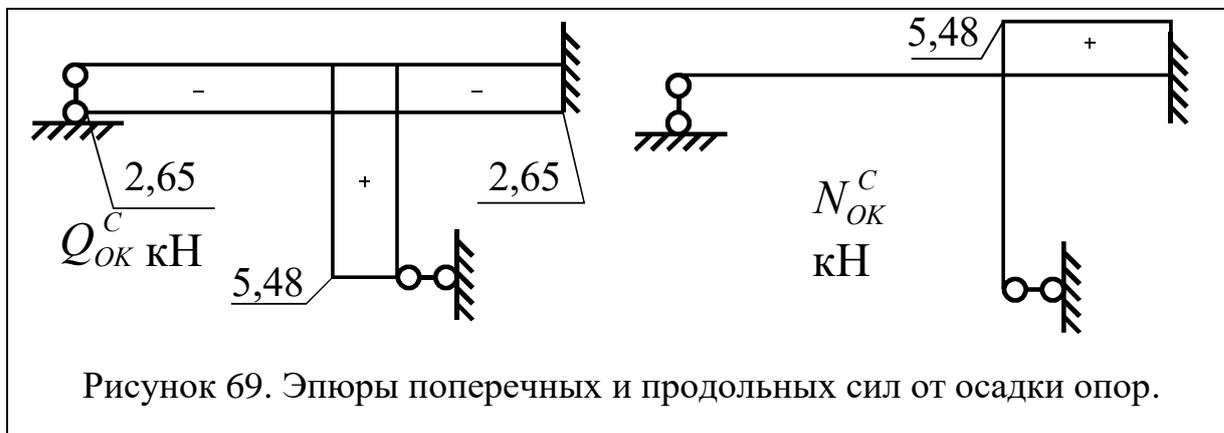
Проверка выполняется.

Используя дифференциальное соотношение, найдем поперечные силы.

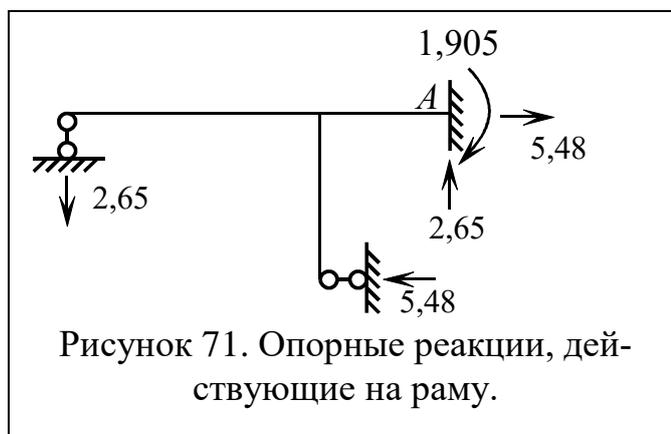
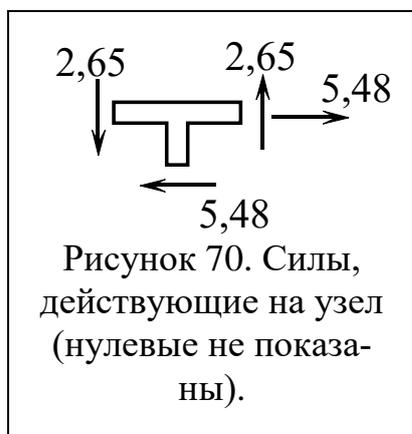
На левом ригеле  $Q_{OK}^C = -\frac{15,87}{6} = -2,65$  кН, на правом ригеле

$$Q_{OK}^C = -\frac{6,03 + 1,905}{3} = -2,65 \text{ кН, на стойке } Q_{OK}^C = \frac{21,9}{4} = 5,48 \text{ кН.}$$

Полученная эпюра показана рисунке 69.



По равновесию узла (рисунок 70) найдем продольные силы. построенная эпюра также показана на рисунке 69. по эпюрам определяем опорные реак-



ции (рисунок 71), и проверяем равновесие рамы:

$$\sum F_x = 5,48 - 5,48 = 0,$$

$$\sum F_y = 2,65 - 2,65 = 0,$$

$$\sum M_A = 2,65 \cdot 9 - 5,48 \cdot 4 - 1,905 = 23,85 - 23,825 = 0,025 \approx 0.$$

Найдем угол поворота сечения  $K$ . Для этого используем единичную эпюру от момента  $i = 1$  (рисунок 66):

$$\Delta_{iC} = \int \frac{M_{OK}^C * M_i}{EJ_P} dx - \sum R_i C =$$

$$= \frac{1}{10^4} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{6,03 - 1,905}{2} - (1 \cdot 0,005) = -0,00438 \text{ рад}$$

**Задача 12.** Расчет статически неопределимой балки методом сил на действии внешней нагрузки и осадки опор.

Требуется:

1. Определить количество лишних связей и выбрать рациональную основную систему.
2. Построить единичные и грузовую эпюры изгибающих моментов и вычислить коэффициенты системы канонических уравнений метода сил.
3. Построить окончательные эпюры изгибающих моментов и выполнить деформационную проверку по новой основной системе.
4. Построить эпюры поперечных сил, найти опорные реакции и проверить равновесие балки.

Исходные данные принять по таблице 12, расчетная схема выбирается по рисунку 72.

Таблица 12.

Исходные данные к задаче 12.

Алфавит	$q_1/ q_2,$ кН/м	$l,$ м	$EJ,$ кНм <sup>2</sup>	заданная осадка	величина осадки, (для линейных – м, для угловых – рад)
а б в	2/0	3	3000	$C_2$	0,01
г д е	3/0	4	4500	$C_1$	0,02
ж з и й	4/0	6	6000	$C_3$	0,03
к л м	6/0	8	7500	$C_4$	0,04
н о п	12/0	12	9000	$C_2$	0,06
р с т	0/12	3	3000	$C_1$	0,01
у ф х	0/6	4	4500	$C_3$	0,02
ц ч ш	0/4	6	6000	$C_4$	0,03
щ ь ы ь	0/3	8	7500	$C_1$	0,04
э ю я	0/2	12	9000	$C_3$	0,06

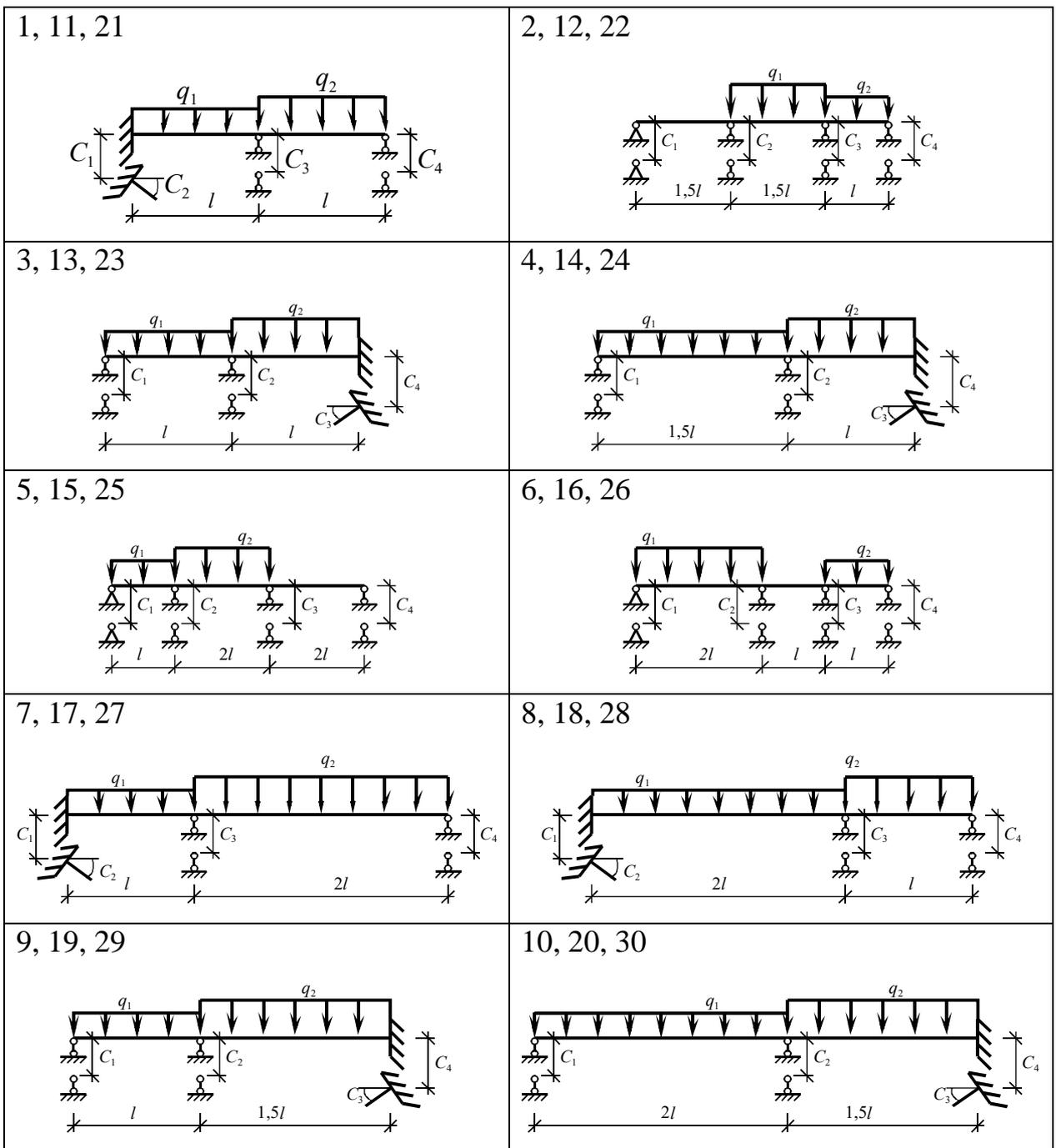
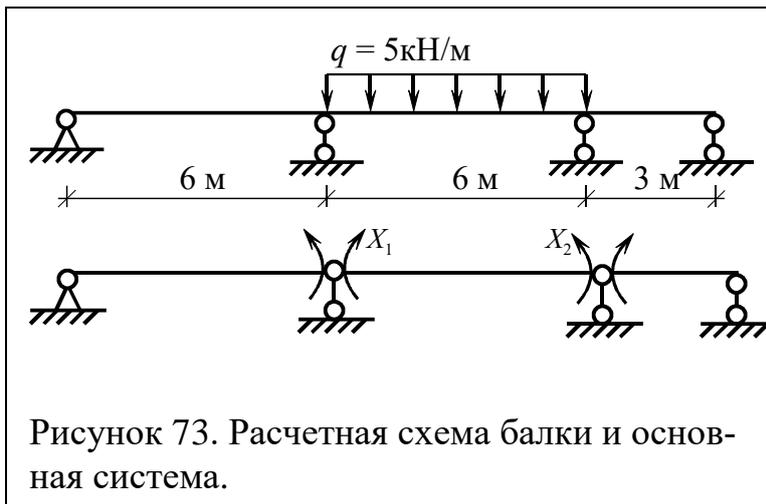


Рисунок 72. Расчетные схемы к задаче 12.



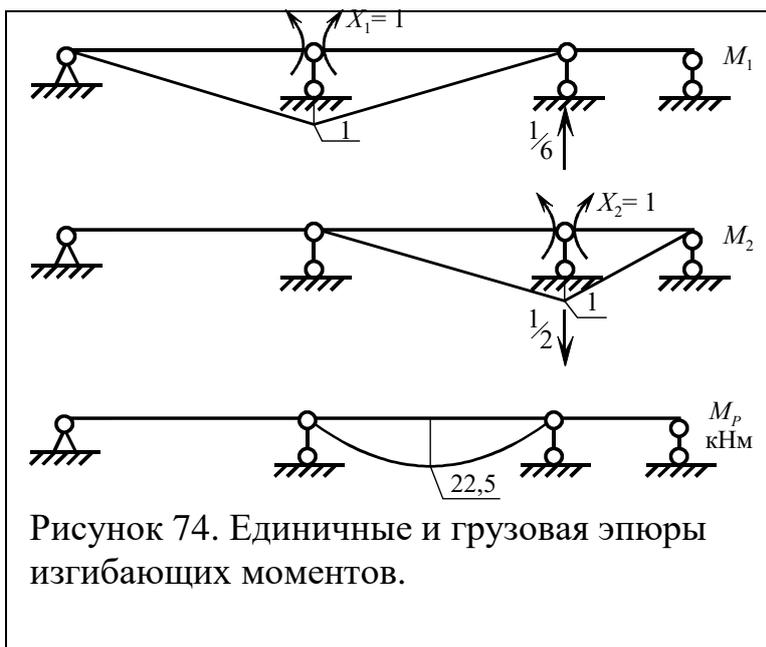
### Пример

Рассмотрим балку, показанную на рисунке 73. Жесткость балки постоянна по всей длине.

Расчет на воздействие нагрузки. Рациональную основную систему получим, врезая шарниры над промежуточными опорами (рисунок 73). Система канонических уравнений запишется в виде

жужточными опорами (рисунок 73). Система канонических уравнений запишется в виде

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} = 0 \end{cases}$$



Для определения коэффициентов канонических уравнений метода сил необходимо построить две единичные эпюры изгибающих моментов и грузовую эпюру (рисунок 74). Коэффициенты системы уравнений найдем перемножением единичных и грузовой эпюр изгибающих моментов с использованием

правила Верещагина или формулы Симпсона:

$$EJ\delta_{11} = [M_1 * M_1] = \left( \frac{1 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) \cdot 2 = 4 \text{ м},$$

$$EJ\delta_{22} = [M_2 * M_2] = \frac{1 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = 3 \text{ м},$$

$$EJ\delta_{12} = EJ\delta_{21} = [M_1 * M_2] = \frac{1 \cdot 6}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = 1 \text{ м},$$

$$EJ\Delta_{1P} = [M_1 * M_P] = \frac{6}{6} (0 + 4 \cdot 0,5 \cdot 22,5 + 0) = 45 \text{ кНм}^2,$$

$$EJ\Delta_{2P} = [M_2 * M_P] = \frac{6}{6} (0 + 4 \cdot 0,5 \cdot 22,5 + 0) = 45 \text{ кНм}^2.$$

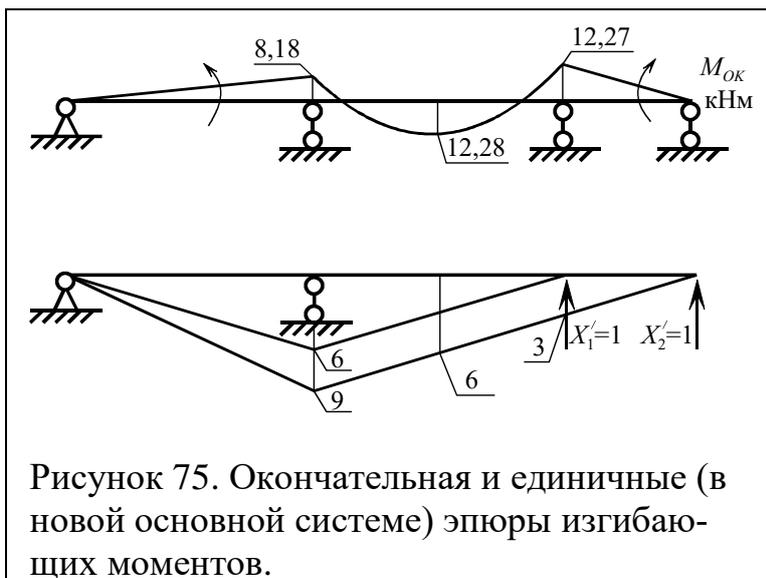
После вычисления коэффициентов запишем и решим систему канонических уравнений:

$$\begin{cases} 4X_1 + X_2 + 45 = 0 \\ X_1 + 3X_2 + 45 = 0 \end{cases}$$

$$X_1 = -8,18 \text{ кНм}, \quad X_2 = -12,27 \text{ кНм}.$$

Построим окончательную эпюру изгибающих моментов:

$$M_{ок} = M_1 X_1 + M_2 X_2 + M_P.$$



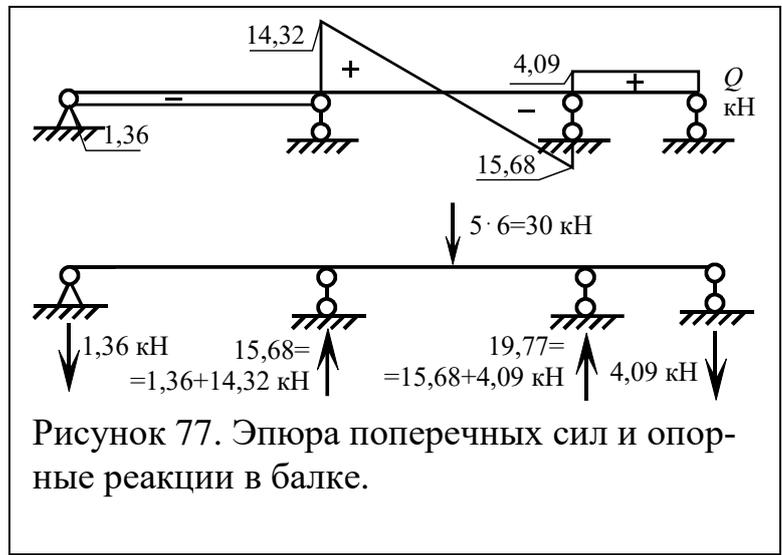
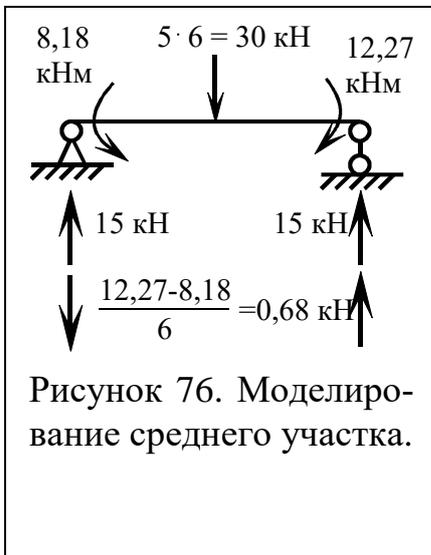
Эпюра приведена на рисунке 75. Построенную эпюру необходимо проверить. Для этого выбирается новая основная система, в которой строятся единичные эпюры (рисунок 75). Эти эпюры следует перемножить с окончательной. Если ошибок нет, то результат должен быть

нулевым (деформационная проверка):

$$EJ[M_1' * M_{ок}] = -\frac{8,18 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{6}{6} \cdot (-8,18 \cdot 6 + 4 \cdot 12,28 \cdot 3 + 0) = 147,36 - 147,24 = 0,12 \approx 0$$

$$\begin{aligned}
 EJ[M_2' * M_{OK}] &= -\frac{8,18 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 + \\
 &+ \frac{6}{6} \cdot (-8,18 \cdot 9 + 4 \cdot 12,28 \cdot 6 - 12,27 \cdot 3) - \frac{12,27 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = \\
 &= 294,72 - 294,48 = -0,24 \approx 0
 \end{aligned}$$

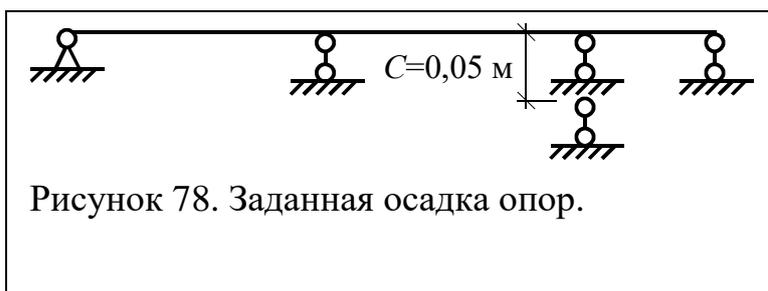
Для построения эпюры поперечных сил используем дифференциальное соотношение  $Q = \frac{dM}{dx}$  - на прямолинейных участках эпюры моментов поперечная сила равна тангенсу угла наклона этой эпюры. На участке с распределенной нагрузкой моделируем пролет балкой на двух опорах, как показано на рисунке 76 (распределенная нагрузка заменена равнодействующей). Постро-



енная эпюра  $Q$  показана на рисунке 77.

По полученной эпюре поперечных сил найдем опорные реакции и проверим равновесие балки. Опорные реакции также показаны на рисунке 77.

$$\begin{aligned}
 \sum F_y &= -1,36 + 15,68 - 30 + 19,77 - 4,09 = 35,45 - 35,45 = 0, \\
 \sum M_A &= 15,68 \cdot 6 - 30 \cdot 9 + 19,77 \cdot 12 - 4,09 \cdot 15 = 331,32 - 331,35 = -0,03.
 \end{aligned}$$



Выполним расчет на осадку опор, показанную на рисунке 78. Жесткость балки на изгиб

$$EJ = 12000 \text{ кНм}^2.$$

Единичные эпюры и коэффициенты возьмем из предыдущего расчета.

Вычислим новые грузовые коэффициенты:

$$EJ\Delta_{1C} = -EJ \sum_k R_{k1} C_k = -12000 \cdot \left( -\frac{1}{6} \cdot 0,05 \right) = 100 \text{ кНм}^2,$$

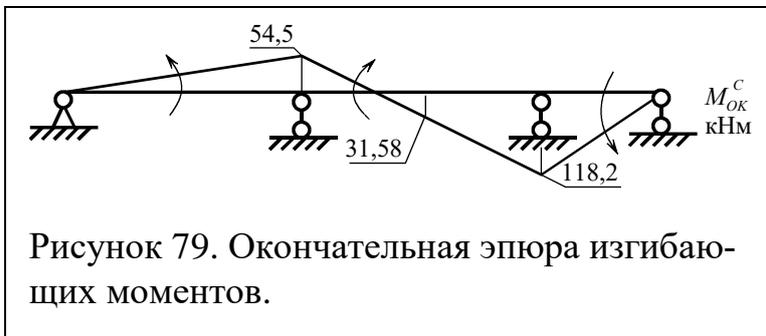
$$EJ\Delta_{2C} = -EJ \sum_k R_{k2} C_k = -12000 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 0,05 \right) = -300 \text{ кНм}^2.$$

Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 4X_1 + X_2 + 100 = 0 \\ X_1 + 3X_2 - 300 = 0 \end{cases}$$

$$X_1 = -54,5 \text{ кНм},$$

$$X_2 = 118,2 \text{ кНм}$$



Далее следует построение окончательной эпюры изгибающих моментов:

$$M_{OK}^C = M_1 X_1 + M_2 X_2.$$

Окончательная эпюра приведена на рисунке 79. Для ее проверки используем единичные эпюры рисунка 75. Их следует перемножить с окончательной. Если ошибок нет, то результат должен быть равен грузовому коэффициенту, взятому с обратным знаком (деформационная проверка):

$$EJ\Delta'_{1C} = -12000 \cdot (-1 \cdot 0,05) = 600,$$

$$EJ[M'_1 * M_{OK}^C] = -\frac{54,5 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{6}{6} \cdot (-54,5 \cdot 6 + 4 \cdot 31,58 \cdot 3 + 0) = -599,2,$$

$$EJ\Delta'_{2C} = -12000 \cdot (0 \cdot 0,05) = 0,$$

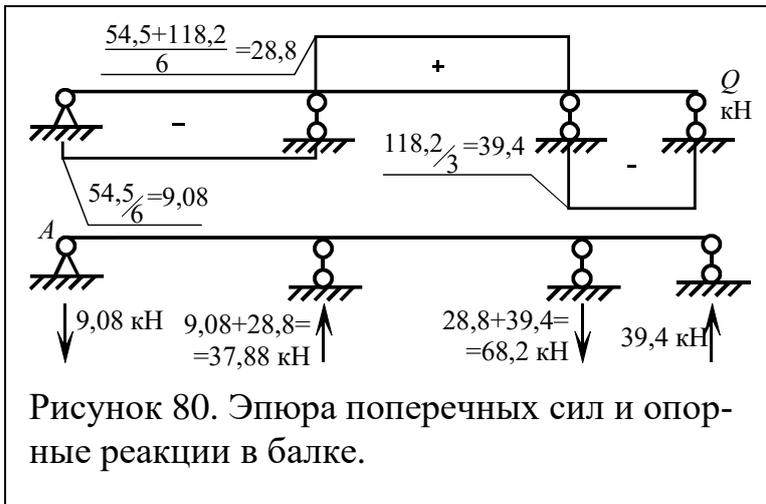
$$EJ[M'_2 * M_{OK}^C] = -\frac{54,5 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 + \frac{6}{6} \cdot (-54,5 \cdot 9 + 4 \cdot 31,58 \cdot 6 + 118,2 \cdot 3) + \frac{118,2 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = -981 + 628,5 + 354,6 = 2,1 \approx 0,$$

После деформационной проверки эпюры моментов строим эпюру поперечных сил. Снова используем дифференциальное соотношение  $Q = \frac{dM}{dx}$ . По полученной эпюре находим опорные реакции, и проверяем равновесие балки. Эпюра  $Q$  и опорные реакции приведены на рисунке 80.

$$\sum F_y = -9,08 + 37,88 - 68,2 + 39,4 = 77,28 - 77,28 = 0,$$

$$\sum M_A = 37,88 \cdot 6 - 68,2 \cdot 12 + 39,4 \cdot 15 = 818,3 - 818,4 = -0,1 \approx 0.$$

Проверка выполнена.



**Задача 13.** Построение эпюр внутренних усилий в арке с затяжкой.

Требуется:

1. Определить количество лишних связей и выбрать основную систему метода сил.
2. Построить единичную и грузовую эпюры изгибающих моментов и вычислить коэффициенты канонических уравнений метода сил.
3. Построить окончательную эпюру изгибающих моментов и выполнить деформационную проверку.

Очертание оси арки принять по дуге окружности. Исходные данные выбрать по таблице 12, расчетная схема показана на рисунке 81. Сечение арки - прямоугольное, размером 12×18см, модуль упругости  $E = 30 \cdot 10^6$  кПа. Сечение затяжки – квадрат со стороной 5см, модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^8$  кПа.

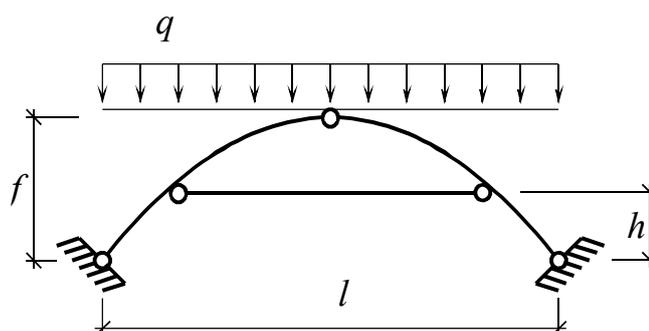


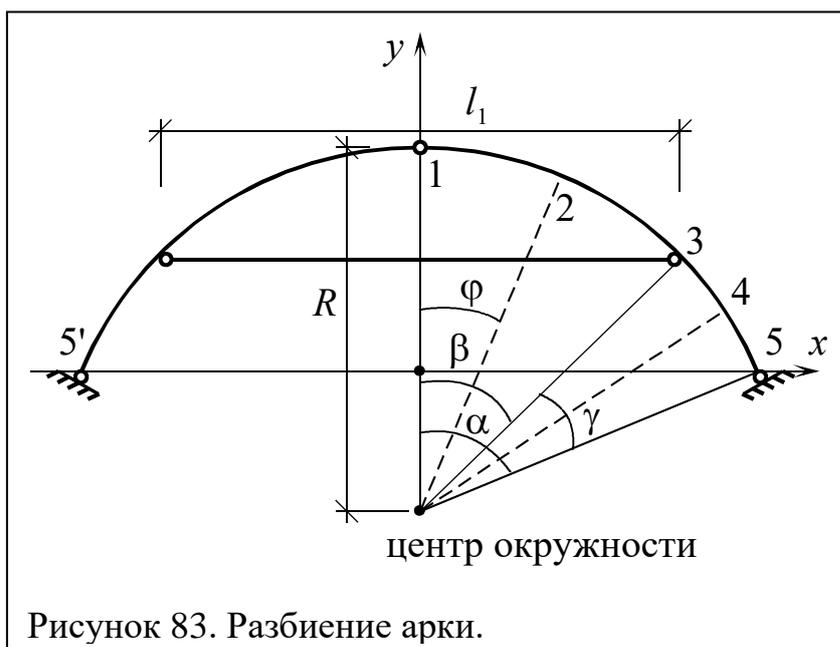
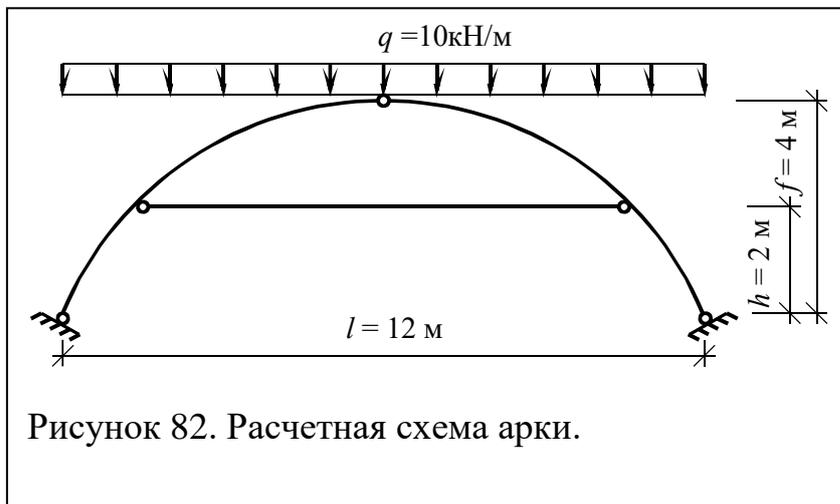
Рисунок 81. Расчетная схема к задаче 13.

Таблица 13.

Исходные данные к задаче 13.

Алфавит	$q$ , кН/м	$l$ , м	$f/l$	$h/f$
а б в	2	10	0,2	0,1
г д е	3	12	0,25	0,2
ж з и й	4	15	0,3	0,3
к л м	6	18	0,35	0,4
н о п	8	20	0,4	0,5
р с т	2	10	0,2	0,1
у ф х	3	12	0,25	0,2

Ц Ч Ш	4	15	0,3	0,3
Щ Ъ Ы Ь	6	18	0,35	0,4
Э Ю Я	8	20	0,4	0,5



### Пример

Расчетная схема арки приведена на рисунке 82. Арка очерчена по дуге окружности. Сечение арки – прямоугольное размером  $10 \times 18$  см, материал – бетон В25 ( $E_B = 30 \cdot 10^6$  кПа); сечение затяжки – квадратное со стороной 10 см, материал – сталь ( $E_{СТ} = 2 \cdot 10^8$  кПа).

Разобьем каждую полуарку на 4 части (на рисунке 83 показано разбиение только правой части, разбиение левой – симметрично) и введем систему координат  $x, y$ . Для вычисления координат сечений 2, 3 и 4 необходимо знать радиус арки  $R$ , и углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ .

Радиус арки можно найти по формуле

$$R = \frac{1}{2} \left( f + \frac{l^2}{4f} \right) = \frac{1}{2} \left( 4 + \frac{12^2}{4 \cdot 4} \right) = 6,50 \text{ м.}$$

Найдем углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ :

$$\cos \alpha = \frac{R-f}{R} = \frac{6,5-4}{6,5} = 0,385, \quad \alpha = 67,5^\circ,$$

$$\cos \beta = \frac{R-f+h}{R} = \frac{6,5-4+2}{6,5} = 0,692, \quad \beta = 45,9^\circ,$$

$$\gamma = \alpha - \beta = 67,5^\circ - 45,9^\circ = 21,6^\circ.$$

Теперь для каждого сечения арки можно найти координаты:

$$y = R \cos \varphi - (R - f), \quad x = R \sin \varphi,$$

и длину затяжки  $l_1 = 2R \sin \beta = 2 \cdot 6,5 \cdot \sin 45,9^\circ = 9,34 \text{ м}$ .

Вычисленные координаты сечений арки сведены в таблицу 14.

Количество лишних связей  $L = 3K - III = 3 \cdot 2 - 5 = 1$ . Основную систему выберем, разрезав затяжку. Каноническое уравнение метода сил имеет вид

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Найдем опорные реакции от  $X_1 = 1$  (рисунок 84):

$$\sum M_5 = 0, \quad V_5 \cdot 12 + X_1 \cdot 2 - X_1 \cdot 2 = 0, \quad V_5 = 0;$$

$$\sum M_{5'} = 0, \quad V_{5'} \cdot 12 + X_1 \cdot 2 - X_1 \cdot 2 = 0, \quad V_{5'} = 0;$$

$$\sum M_1^{III} = 0, \quad H \cdot 4 - X_1 \cdot 2 + V_5 \cdot 6 = 0, \quad H = 0,5.$$

Единичные моменты в сечениях арки найдем как сумму моментов всех сил по одну сторону от сечения:

сечение ниже затяжки –  $M_1 = H \cdot y$ ,

сечение выше затяжки –  $M_1 = -x_1 \cdot (y - h) + H \cdot y$ .

Аналогично найдем опорные реакции и моменты от внешней нагрузки (рисунок 85):

$$\sum M_{5'} = 0, \quad V_5 \cdot 12 - q \cdot 12 \cdot 6 = 0, \quad V_5 = \frac{10 \cdot 12 \cdot 6}{12} = 60 \text{ кН};$$

$$\sum M_5 = 0, \quad V_{5'} \cdot 12 - q \cdot 12 \cdot 6 = 0, \quad V_{5'} = \frac{10 \cdot 12 \cdot 6}{12} = 60 \text{ кН};$$

$$\sum M_1^{III} = 0, \quad H \cdot 4 - V_5 \cdot 6 + q \cdot 6 \cdot 3 = 0, \quad H = \frac{60 \cdot 6 - 10 \cdot 6 \cdot 3}{4} = 45 \text{ кН};$$

$$M_P = V_5 \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right) - \frac{1}{2}q\left(\frac{l}{2} - x\right)^2 - H \cdot y.$$

Вычисление ординат единичной и грузовой эпюр моментов также приведено в таблице 14. В силу симметрии арки, вычисления производим только для правой полуарки.

Таблица 14.

Координаты сечений и ординаты единичной и грузовой эпюр моментов.

Сечение	$\varphi$	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$x, \text{ м}$	$y, \text{ м}$	$M_1, \text{ м}$	$M_P, \text{ кНм}$
1	0	0	1	0	4	0	0
2	22,9	0,389	0,921	2,53	3,49	0,255	-9,00
3	45,9	0,718	0,692	4,67	2,00	1	-19,0
4	56,7	0,836	0,549	5,43	1,07	0,535	-15,5
5	67,5	0,923	0,385	6	0	0	0



Рисунок 84. Единичные опорные реакции и эпюра изгибающих моментов.

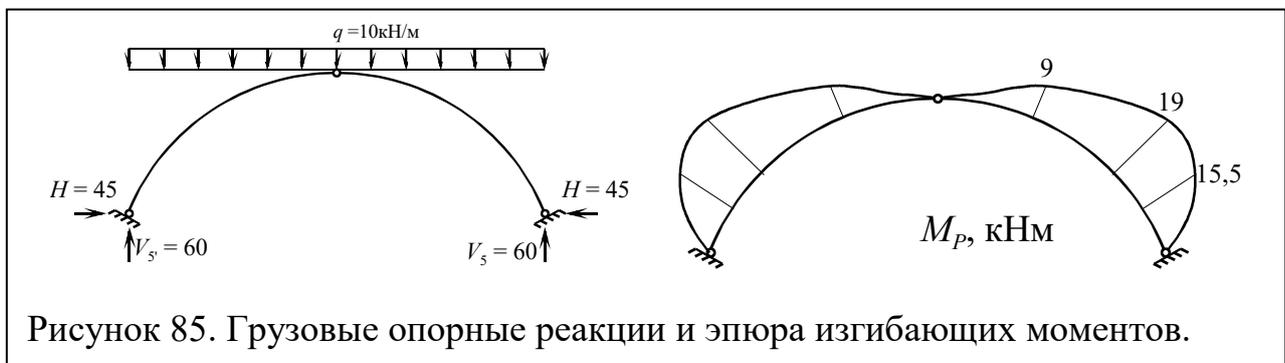


Рисунок 85. Грузовые опорные реакции и эпюры изгибающих моментов.

Найдем жесткость арки:

$$E_B J = 30 \cdot 10^6 \cdot 4860 \cdot 10^{-8} = 1458 \text{ кНм}^2, \quad \text{где } J = \frac{10 \cdot 18^3}{12} = 4860 \text{ см}^4,$$

и затяжки:

$$E_{CT} A = 2 \cdot 10^8 \cdot 100 \cdot 10^{-4} = 2 \cdot 10^6 \text{ кН}, \quad \text{где } A = 10 \cdot 10 = 100 \text{ см}^2,$$

Вычислим длины дуг арки между сечениями 1 и 3, а также сечениями 3 и 5:

$$l_{1-3} = \frac{R\beta\pi}{180} = \frac{6,5 \cdot 45,9 \cdot 3,14}{180} = 5,20 \text{ м},$$

$$l_{3-5} = \frac{R\gamma\pi}{180} = \frac{6,5 \cdot 21,6 \cdot 3,14}{180} = 2,45 \text{ м}.$$

Вычислим единичный и грузовой коэффициенты канонического уравнения метода сил, используя формулу Симпсона (из-за симметрии расчет ведем только для половины сооружения):

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{5,20}{6E_B J} (0 + 4 \cdot 0,255^2 + 1^2) + \frac{2,45}{6E_B J} (1^2 + 4 \cdot 0,535^2 + 0) + \frac{9,34 \cdot 1 \cdot 1}{2E_{CT} A} = \\ &= \frac{1,967}{E_B J} + \frac{4,67}{E_{CT} A} = \frac{1,967}{1458} + \frac{4,67}{2 \cdot 10^6} = 1,351 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= \frac{5,20}{6E_B J} (0 - 4 \cdot 0,255 \cdot 9 - 1 \cdot 19) + \\ &+ \frac{2,45}{6E_B J} (-1 \cdot 19 - 4 \cdot 0,535 \cdot 15,5 + 0) = -\frac{45,72}{E_B J} = -\frac{45,72}{1458} = -31,36 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Запишем и решим каноническое уравнение метода сил:

$$1,351 \cdot 10^{-3} X_1 - 31,36 \cdot 10^{-3} = 0$$

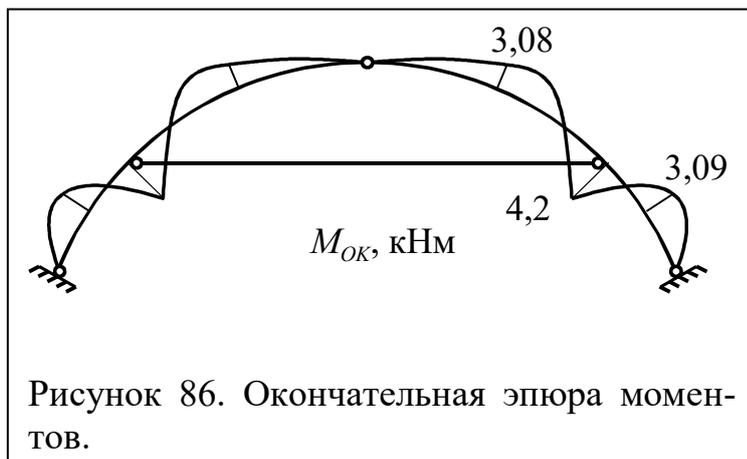
;

$$X_1 = \frac{31,36 \cdot 10^{-3}}{1,351 \cdot 10^{-3}} = 23,2 \text{ кН}.$$

Построим окончательную эпюру изгибающих моментов:

$$M_{OK} = M_1 X_1 + M_P \quad (\text{рисунок 86}).$$

Выполним деформационную проверку. для этого окончатель-



ную эпюру следует умножить на единичную  $M_1$ .

$$\begin{aligned} M_1 * M_{OK} &= \frac{5,20}{6E_B J} (0 - 4 \cdot 0,255 \cdot 3,08 + 1 \cdot 4,2) + \frac{2,45}{6E_B J} (1 \cdot 4,2 - 4 \cdot 0,535 \cdot 3,09 + 0) + \\ &+ \frac{9,34 \cdot 23,2 \cdot 1}{2E_{CT} A} = \frac{5,33}{1458} - \frac{5,36}{1458} + \frac{114,9}{2 \cdot 10^6} = \\ &= 3,73 \cdot 10^{-3} - 3,68 \cdot 10^{-3} = 0,05 \cdot 10^{-3} \approx 0 \end{aligned}$$

Проверка выполняется.

Продольная сила в затяжке равна неизвестному усилию:

$$N = X_1 = 23,2 \text{ кН.}$$

**Задача 14.** Расчет рамы методом перемещений на действие нагрузки, осадки опор и изменение температуры.

Требуется:

1. Определить количество дополнительных связей и изобразить основную систему метода перемещений.
2. Построить единичные и грузовые эпюры изгибающих моментов.
3. Вычислить коэффициенты системы канонических уравнений метода перемещений и решить ее отдельно от трех видов воздействия.
4. Построить окончательные эпюры изгибающих моментов и выполнить проверку равновесия узлов и ригелей (стоек), а также эпюры поперечных и продольных сил от всех воздействий, найти опорные реакции и проверить равновесие рамы.
5. Найти перемещения сечения  $K$  (вертикальное и горизонтальное отдельно от нагрузки и осадки опор).

Исходные данные принять по таблице 15, расчетная схема выбирается по рисунку 87. Коэффициент линейного расширения  $\alpha = 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}}$ , высота сечения ригеля  $h_p = 0,4$  м, высота сечения стойки  $h_c = 0,3$  м.

Таблица 15.

Исходные данные к задаче 14.

Алфавит	$q_1/q_2/q_3$ , кН/м	$P_1/P_2/P_3$ , кН	$\frac{EJ_p}{EJ_c}$	$EJ_p$ , кНм <sup>2</sup>	Осадка $C$ , для линейных – м, для угловых – рад	$\Delta t_B$ , °C	$\Delta t_H$ , °C
а б в	0/0/6	30/30/0	1,25	3000	0,03	+10	-25
г д е	0/6/0	0/30/30	1,5	4500	0,06	+15	-30
ж з и й	6/0/0	30/0/30	1,75	6000	0,045	+20	-35
к л м	12/0/0	20/20/0	2,0	7500	0,09	+25	-15
н о п	0/12/0	0/20/20	2,5	9000	0,12	+30	-20
р с т	0/0/12	16/0/16	1,25	3000	0,03	+10	-25
у ф х	3/0/0	40/40/0	1,5	4500	0,06	+15	-30

Ц Ч Ш	0/3/0	0/40/40	1,75	6000	0,045	+20	-35
Щ Ъ Ы Ь	0/0/3	16/16/0	2,0	7500	0,09	+25	-15
Э Ю Я	0/0/4	20/20/0	2,5	9000	0,12	+30	-20

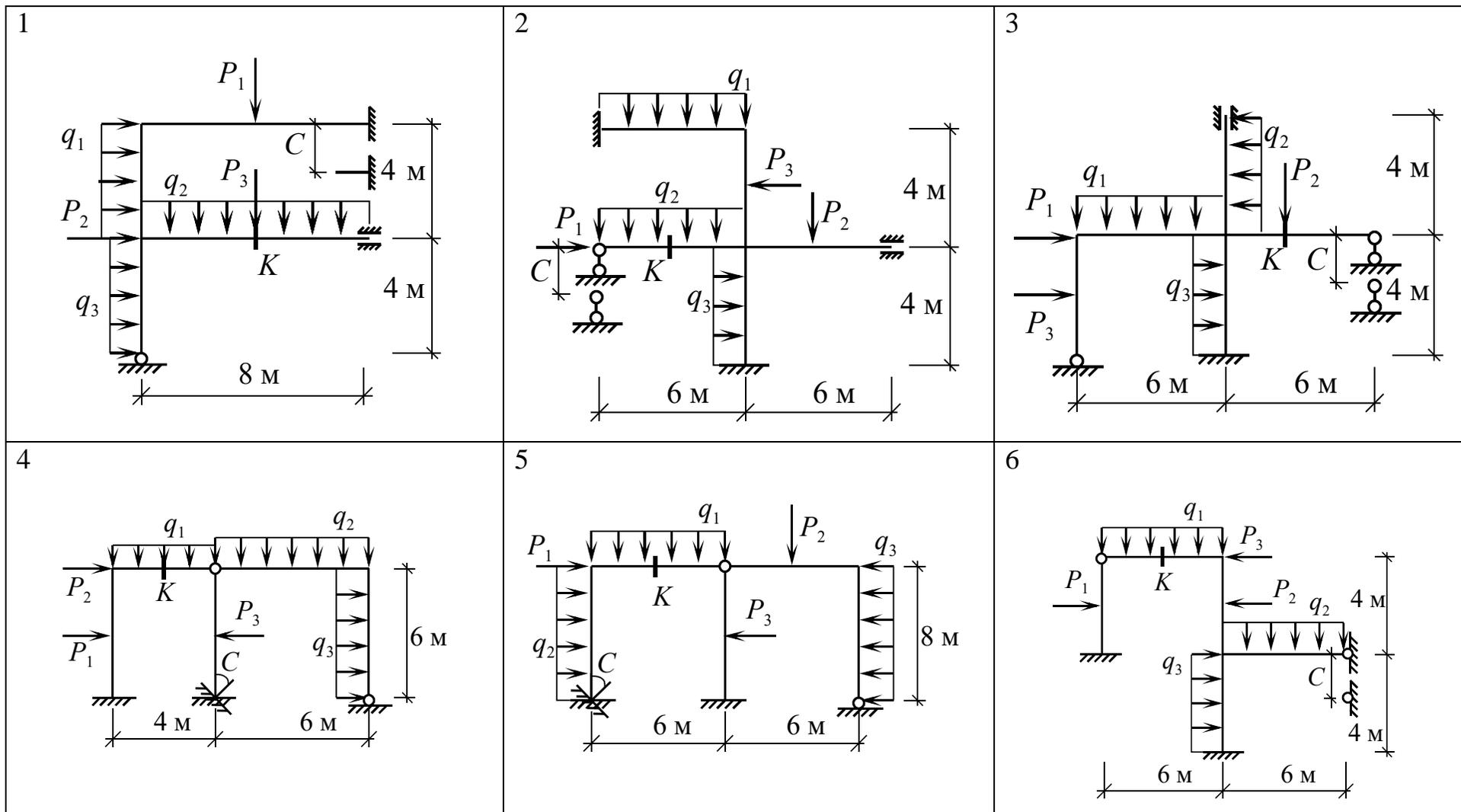


Рисунок 87. Расчетные схемы к задаче 14.

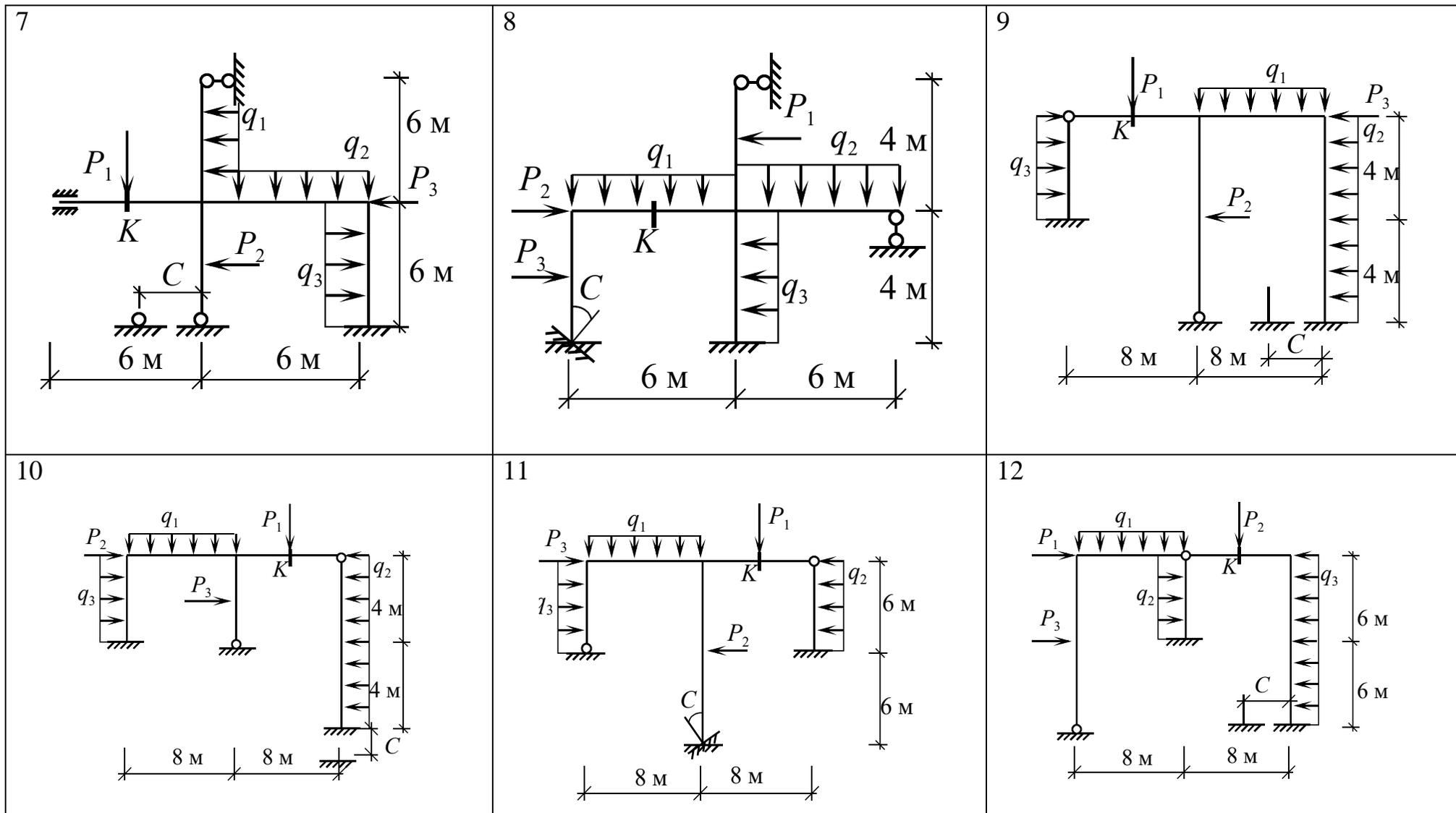


Рисунок 87. Расчетные схемы к задаче 14 (продолжение).

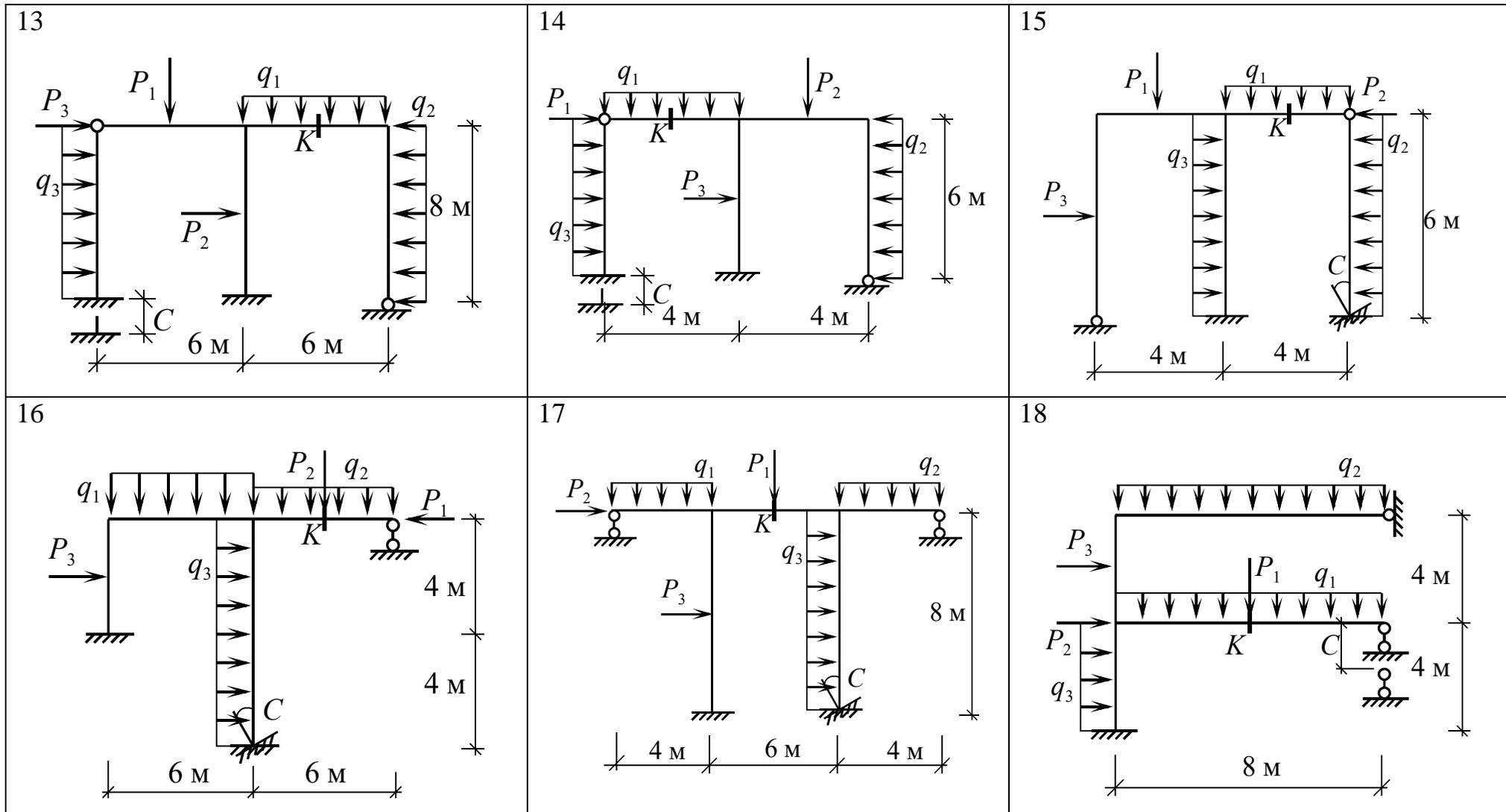


Рисунок 87. Расчетные схемы к задаче 14 (продолжение).

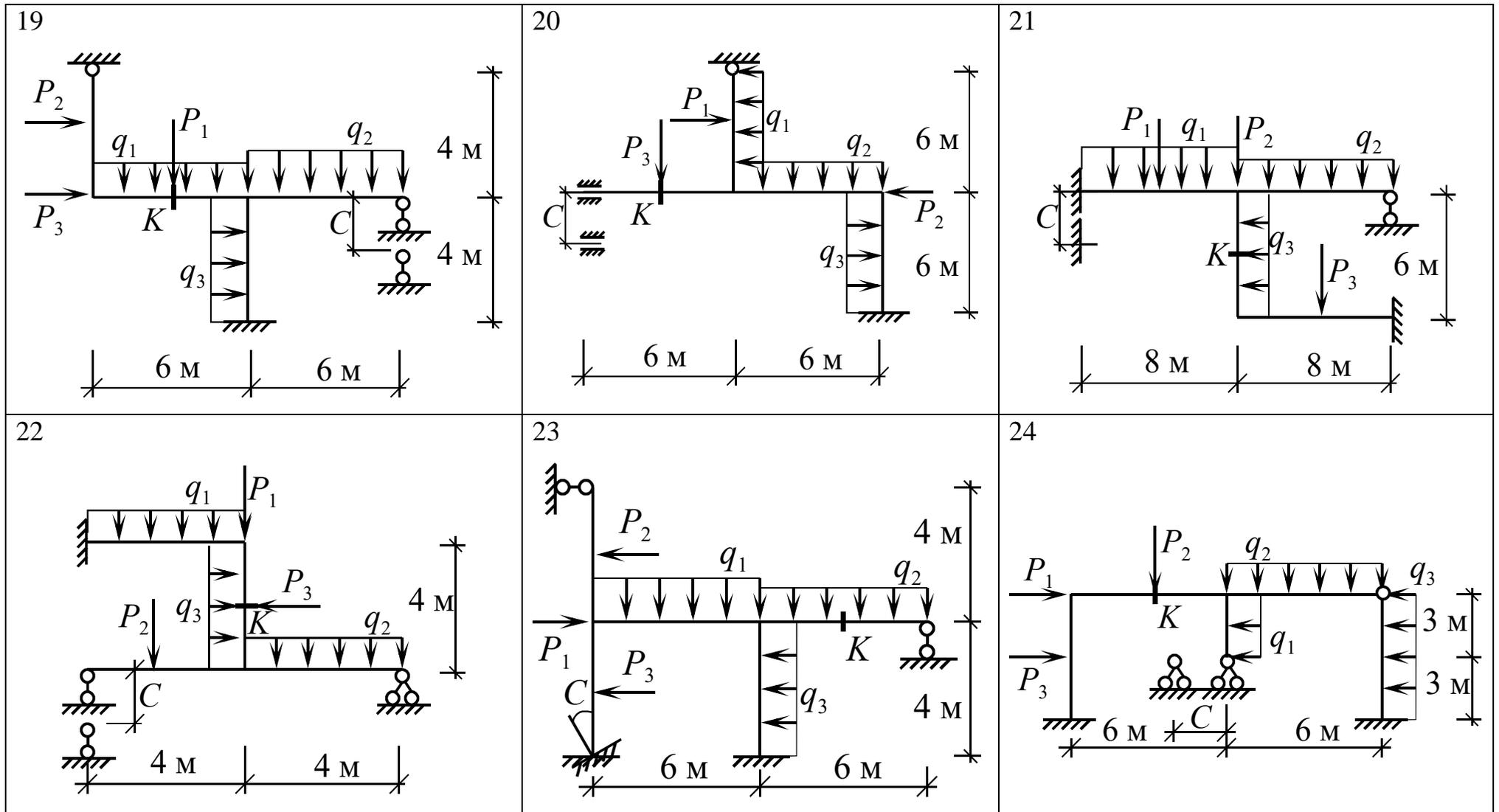


Рисунок 87. Расчетные схемы к задаче 14 (продолжение).

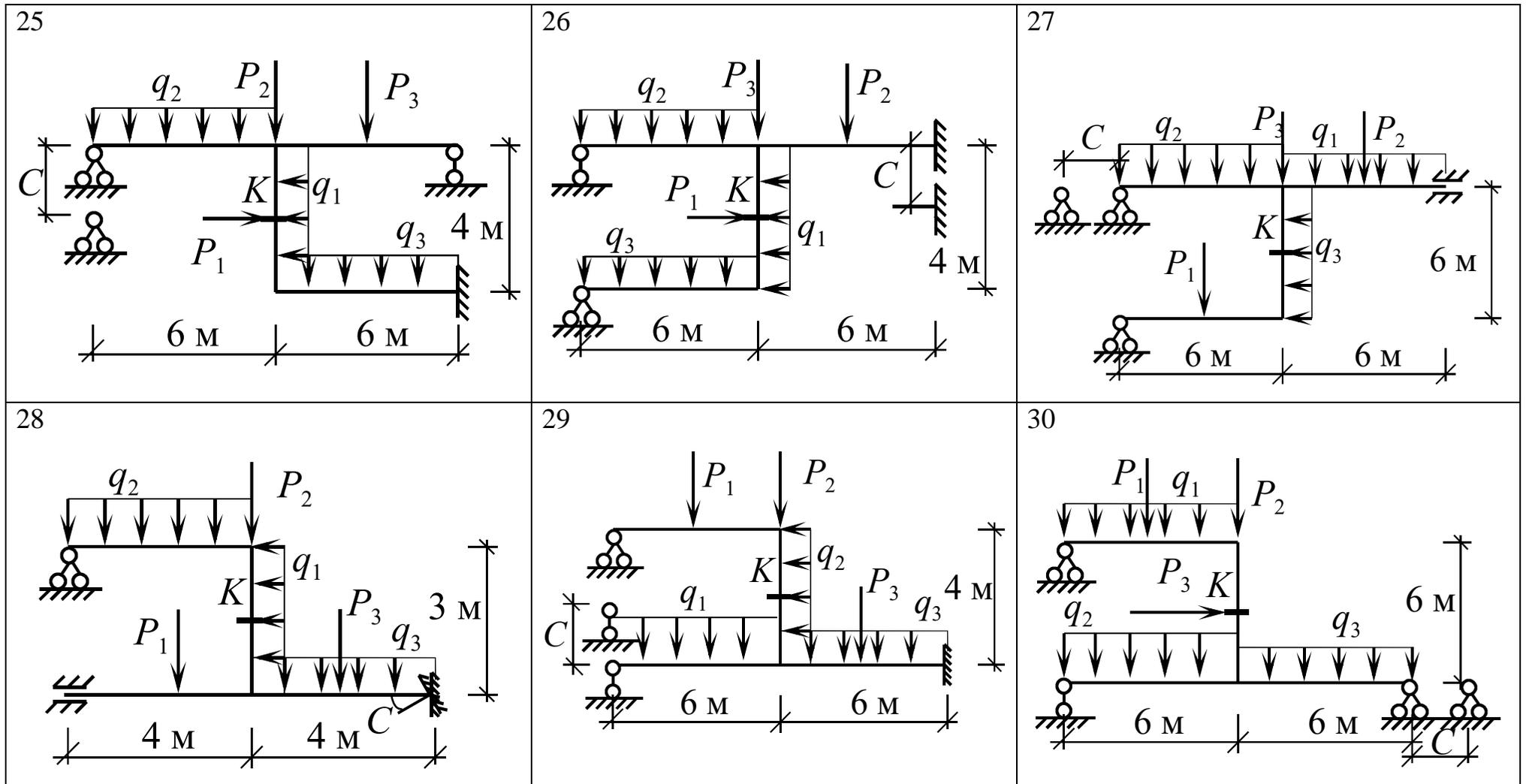
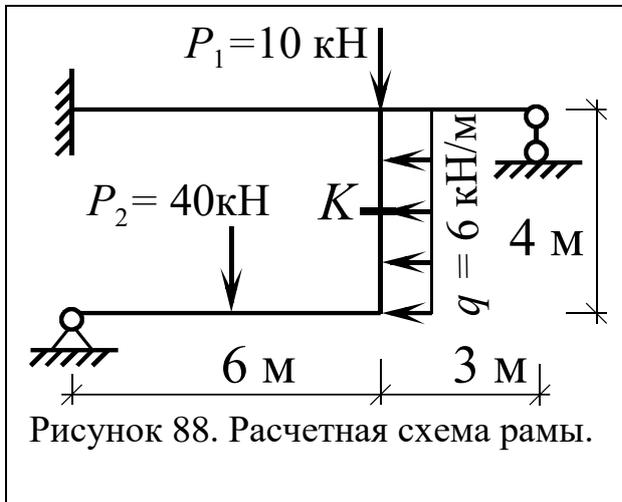


Рисунок 87. Расчетные схемы к задаче 14 (окончание).

## Пример

Рассмотрим раму, показанную на рисунке 88. Примем отношение жесткостей ригеля и стойки  $J_P/J_C = 2$ .

Основную систему метода перемещений получим, разбивая раму на отдельные простые балки, которые при-



ведены в таблице приложения Г. Для этого необходимо в каждый жесткий узел установить дополнительную угловую связь, и поставить линейную связь, препятствующую вертикальному перемещению стойки, т.е. необходимы три дополнительные связи ДС1-ДС3. Результат показан на рисунке 89.

Запишем канонические уравнения метода перемещений:



$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1P} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2P} = 0 \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3P} = 0 \end{cases}$$

где  $r_{ij}$ ,  $R_{ip}$  - единичные и грузовые коэффициенты системы.

Приведем погонные жесткости всех стержней к одному параметру. Стержни  $AB$  и  $DE$  имеют одинаковую жесткость и длину, поэтому для них погонная жесткость одинакова:

$$i_{AB} = i_{DE} = \frac{EJ_P}{6}.$$

Для стержней  $BC$  и  $BE$  получим:

$$i_{BC} = \frac{EJ_P}{3}, \quad i_{BE} = \frac{EJ_C}{4} = \frac{EJ_P}{8}.$$

Пусть  $i = \frac{EJ_P}{24}$ , тогда  $i_{AB} = i_{DE} = 4i$ ,  $i_{BC} = 8i$ ,  $i_{BE} = 3i$ . Эти значения по-

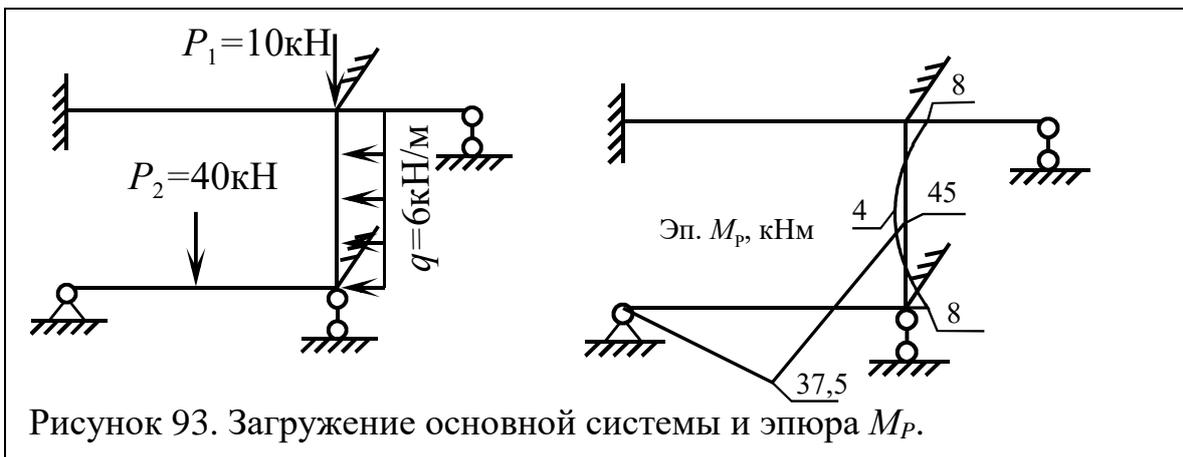
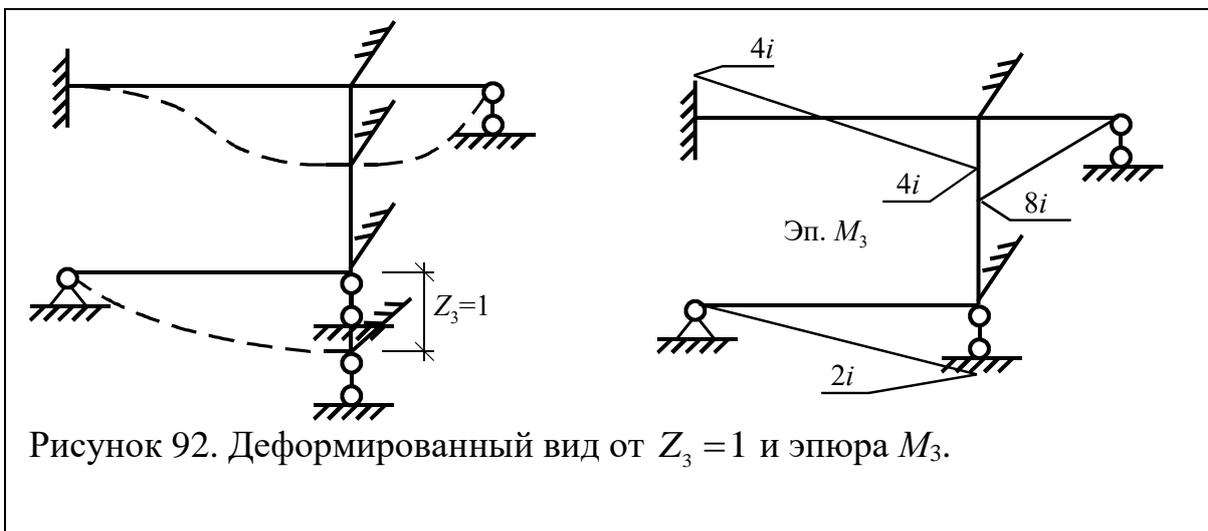
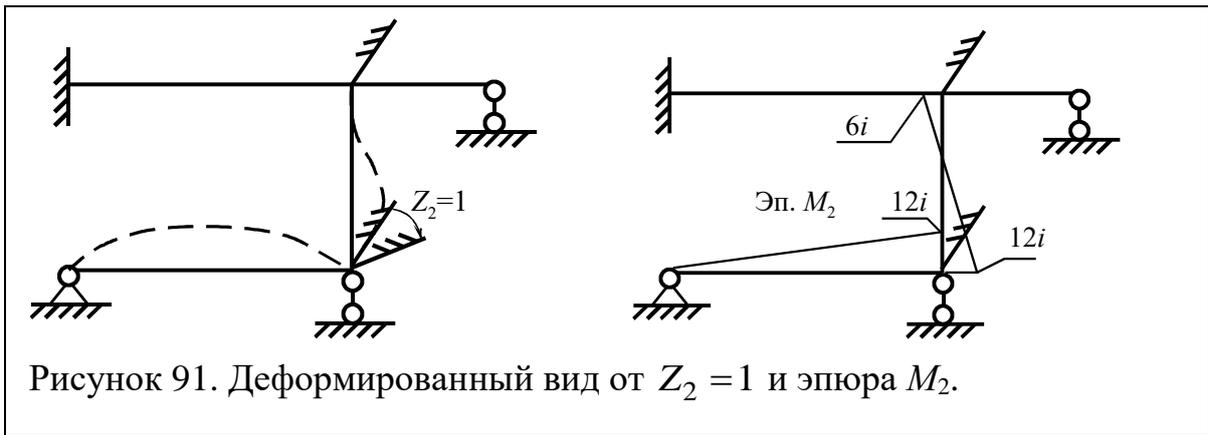
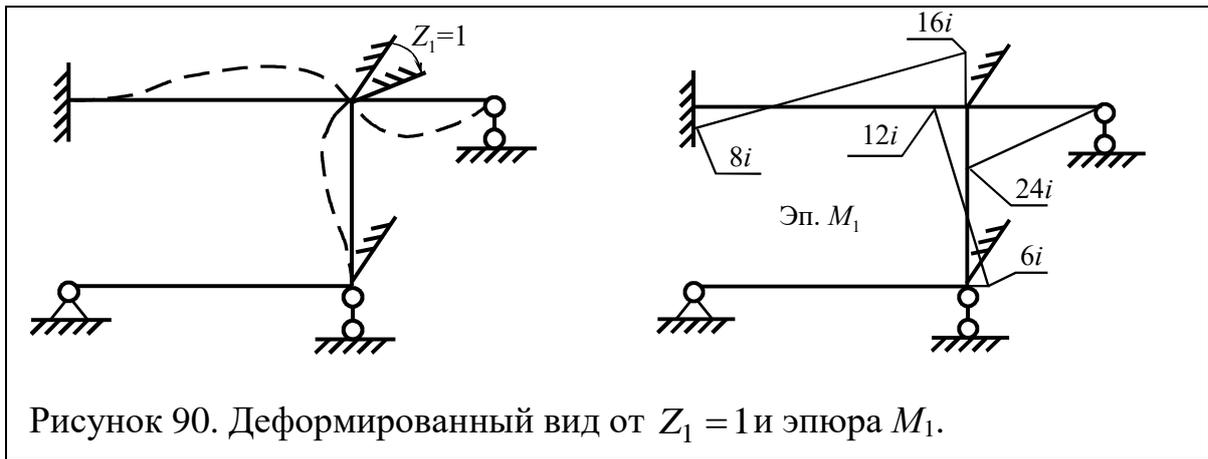
гонных жесткостей покажем на основной системе (рисунок 89).

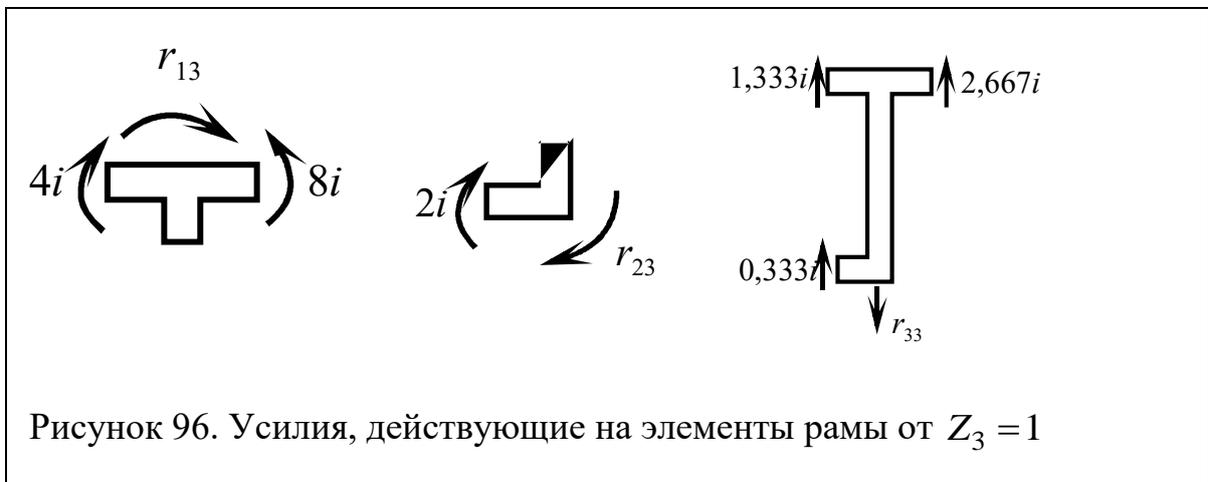
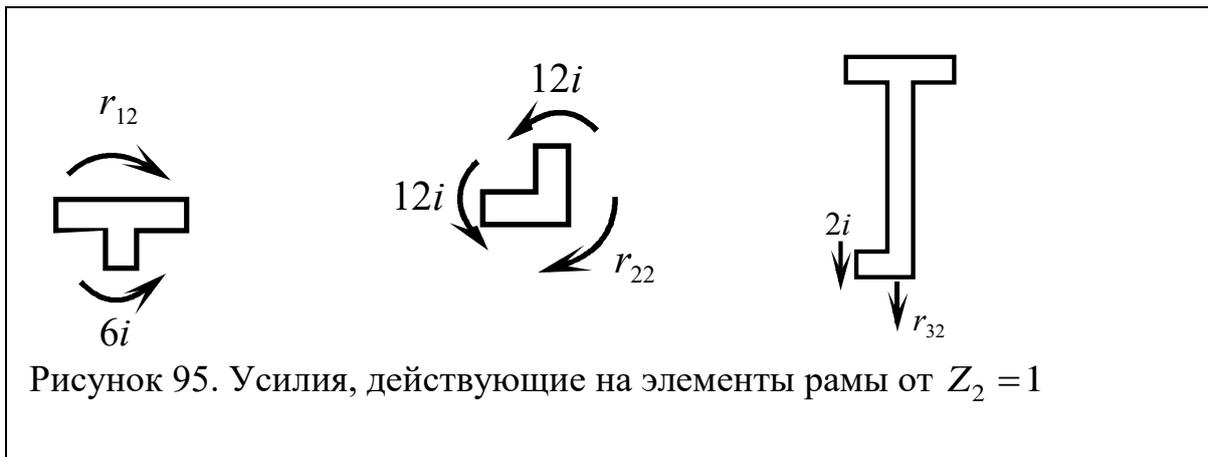
Для вычисления коэффициентов построим единичные и грузовую эпюры изгибающих моментов.

Для построения эпюры  $M_1$  следует задать первой дополнительной связи единичное перемещение  $Z_1 = 1$  и изобразить примерный деформированный вид стержней (рисунок 90). По деформированному виду определяем положение растянутых волокон, и строим эпюру, используя таблицу реакций (приложение Г).

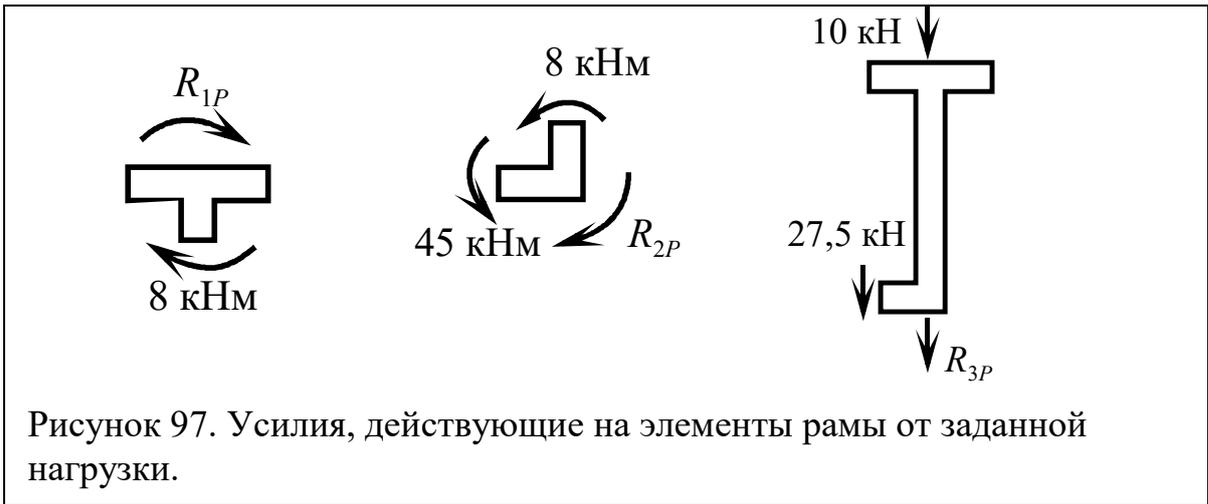
Вычислим ординаты эпюры  $M_1$ . Для стержня  $AB$  схема «заделка-заделка, поворот». В этом случае из таблицы реакций получаем для повернутой заделки (узел  $B$ ) изгибающий момент равный  $4i_{AB} = 4 \cdot 4i = 16i$ , для неподвижной заделки получим  $2i_{AB} = 2 \cdot 4i = 8i$ . Стержень  $BE$  также имеет схему «заделка-заделка, поворот». Тогда для повернутого узла  $B$  получим  $4i_{AE} = 4 \cdot 3i = 12i$ , для неподвижного узла  $E$  найдем  $2i_{AE} = 2 \cdot 3i = 6i$ . Для стержня  $BC$  схема «заделка-шарнир, поворот». В повернутом узле  $B$  получим  $3i_{BC} = 3 \cdot 8i = 24i$ . Эпюра показана на рисунке 90.

Аналогично, задаем единичные перемещения  $Z_2 = 1$  и  $Z_3 = 1$ , и по деформированному виду и приложению Г строим эпюры  $M_2$  и  $M_3$  (рисунки 91 и 92). Для грузовой эпюры (рисунок 93) деформированный вид не обязателен, достаточно «правила паруса». Ординаты грузовой эпюры, также как и для единичных эпюр, вычисляем по таблице реакций (приложение Г). Так как на стержни  $AB$  и  $BC$  не действует нагрузка, то эпюра моментов на этих стержнях отсутствует. На стержень  $DE$  действует сосредоточенная сила, и по таблице получим в узле  $E$  момент  $3/16 \cdot (40 \cdot 6) = 45$  кНм, под силой – момент  $5/32 \cdot (40 \cdot 6) = 37,5$  кНм. На стержень  $BE$  действует распределенная нагрузка, поэтому получаем криволинейную эпюру с ординатами в узлах  $(6 \cdot 4^2)/12 = 8$  кНм.





Определение единичных и грузовых коэффициентов канонических уравнений производится по эпюрам. Для этого вырезаем узлы, в которых наложены дополнительные угловые связи и стойку, вдоль которой установлена линейная связь. На рисунке 94 показано вычисление коэффициентов  $r_{11}$ ,  $r_{21}$  и  $r_{31}$ . Рассматриваем равновесие элементов, к которым приложены дополнительные связи. К узлам прикладываем изгибающие моменты, а к стойке



– поперечные силы. Моменты берем непосредственно с эпюры  $M_1$ , а поперечные силы вычислим как тангенс угла наклона эпюры моментов к оси стержня. Из равновесия узлов и стойки находим  $r_{11} = 16i + 12i + 24i = 52i$ ,  $r_{21} = 6i$ ,  $r_{31} = 8i - 4i = 4i$ . Аналогично с помощью эпюры  $M_2$  найдем коэффициенты  $r_{12} = 6i$ ,  $r_{22} = 12i + 12i = 24i$ ,  $r_{32} = -2i$  (рисунок 95). Далее с помощью эпюры  $M_3$  найдем коэффициенты  $r_{13}$ ,  $r_{23}$  и  $r_{33}$  (рисунок 96). Из равновесия получим  $r_{13} = 8i - 4i = 4i$ ,  $r_{23} = -2i$ ,  $r_{33} = 0,333i + 1,333i + 2,667i = 4,333i$ .

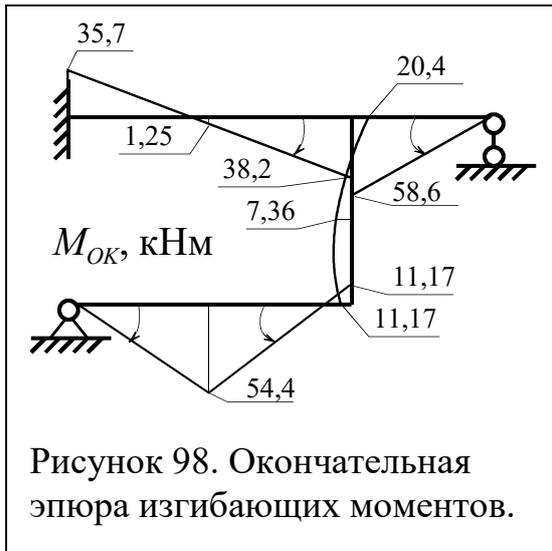
Проверим, что выполняется 1-я теорема Рэлея:  $r_{12} = r_{21}$ ,  $r_{13} = r_{31}$  и  $r_{23} = r_{32}$ .

Грузовые коэффициенты  $R_{1P}$ ,  $R_{2P}$  и  $R_{3P}$  найдем из эпюры  $M_P$  (рисунок 97). Заметим, что сила  $P_1$  на ординаты грузовой эпюры моментов не влияет, но в грузовой коэффициент  $R_{3P}$  входит. Используя равновесие узлов и стойки, получим  $R_{1P} = -8$  кНм,  $R_{2P} = 8 + 45 = 53$  кНм и  $R_{3P} = -10 - 27,5 = -37,5$  кН.

Далее запишем систему канонических уравнений метода перемещений:

$$\begin{aligned} 52iZ_1 + 6iZ_2 + 4iZ_3 - 8 &= 0 \\ 6iZ_1 + 24iZ_2 - 2iZ_3 + 53 &= 0 \\ 4iZ_1 - 2iZ_2 + 4,333iZ_3 - 37,5 &= 0 \end{aligned}$$

Решая эту систему, получим значения неизвестных перемещений  $Z_1 = -\frac{0,317}{i}$ ,  $Z_2 = -\frac{1,44}{i}$ ,  $Z_3 = \frac{8,28}{i}$ . После этого построим окончательную



эпюру изгибающих моментов. Для этого используется гипотеза о независимости действия сил, и момент можно получить сложением эпюр  $M_{i\hat{E}} = M_1 Z_1 + M_2 Z_2 + M_3 Z_3 + M_p$ . Окончательная эпюра приведена на рисунке 98.

Построенную эпюру необходимо проверить. Так как основная система образована путем добавления дополнительных связей, которые на исходной конструкции отсутствуют, то следует убедиться в том, что реакции в этих связях равны нулю. Для этого рассмотрим узлы и стойку, как поступали при вычислении коэффициентов канонических уравнений (рисунок 99).

Из условия равновесия узлов и стойки находим реакции в дополнительных связях:

$$R_1 = 58,6 - 38,2 - 20,4 = 58,6 - 58,6 = 0,$$

$$R_2 = 11,17 - 11,17 = 0$$

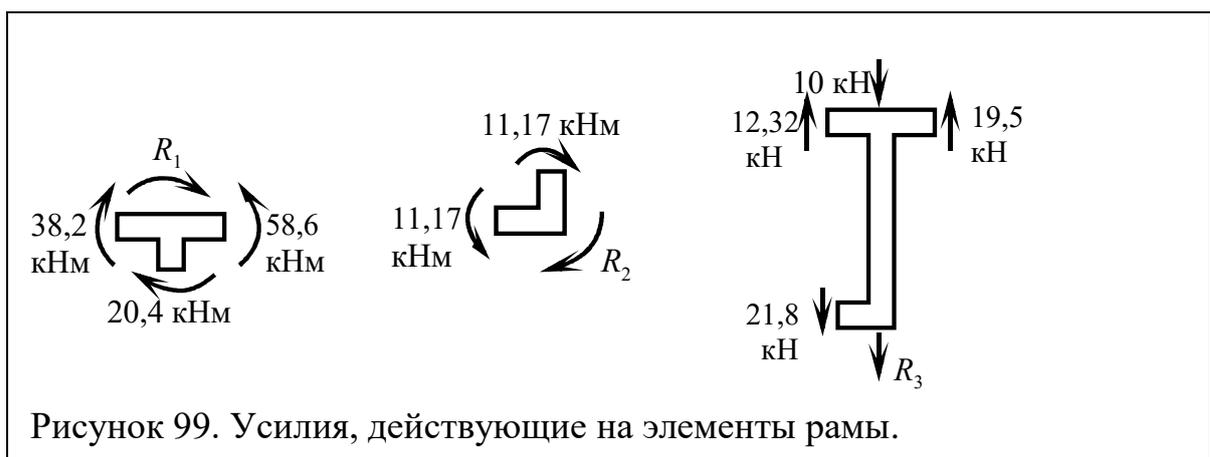
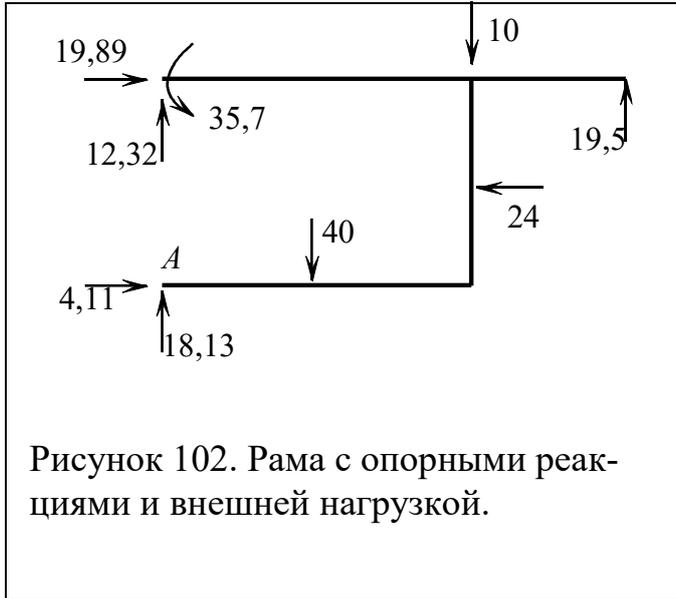
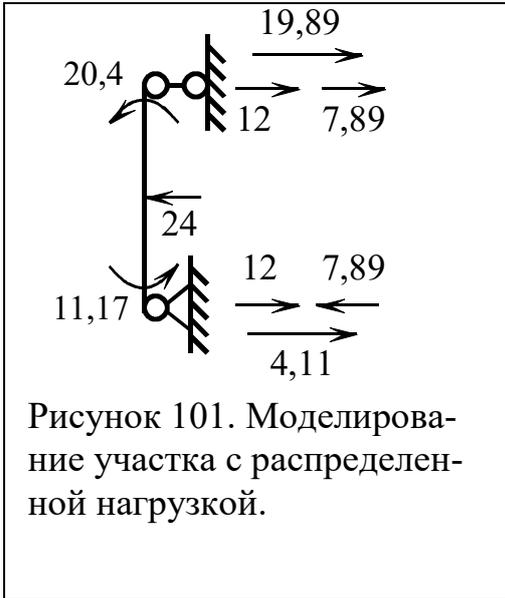
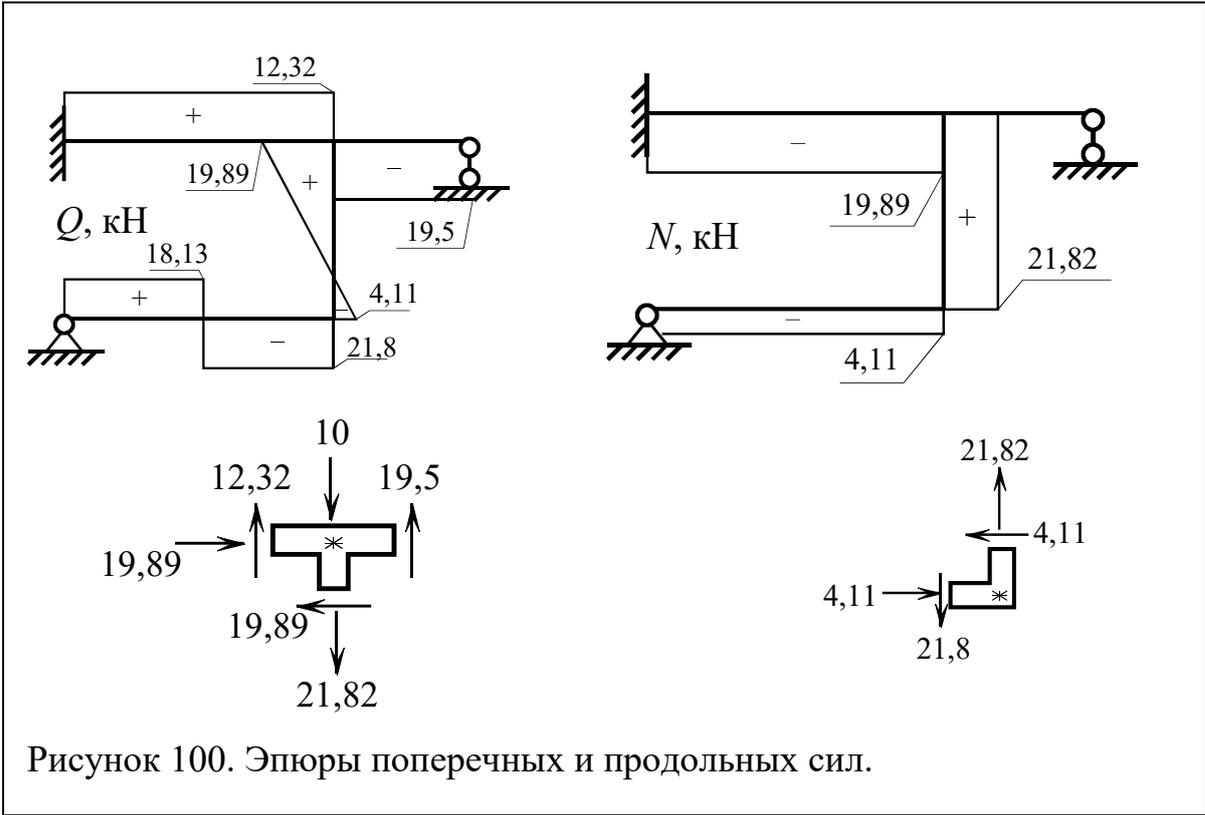


Рисунок 99. Усилия, действующие на элементы рамы.

$$R_3 = 12,32 + 19,5 - 10 - 21,8 = 31,82 - 31,8 = 0,02 \approx 0.$$

Во всех дополнительных связях усилия равны нулю, проверка выполняется.



Построим эпюру поперечных сил (рисунок 100). Для этого используем эпюру моментов. На трех участках поперечные силы уже известны – они получены при проверке реакции  $R_3$  (рисунок 99). На участке с распределенной нагрузкой поперечная сила изменяется линейно. Для того, чтобы найти ординаты по концам участка следует рассмотреть балку на двух опорах (рисунок 101). На нее следует установить равнодействующую распределенной нагрузки и моменты, которые определяются по концам этого участка на эпю-

ре  $M_{OK}$  (рисунок 98). Находим опорные реакции в этой балке, они численно равны поперечным силам на границах участка.

Продольные силы найдем из равновесия узлов (рисунок 100).

По эюграм  $M_{OK}$ ,  $Q$  и  $N$  найдем опорные реакции и проверим равновесие рамы в целом (рисунок 102).

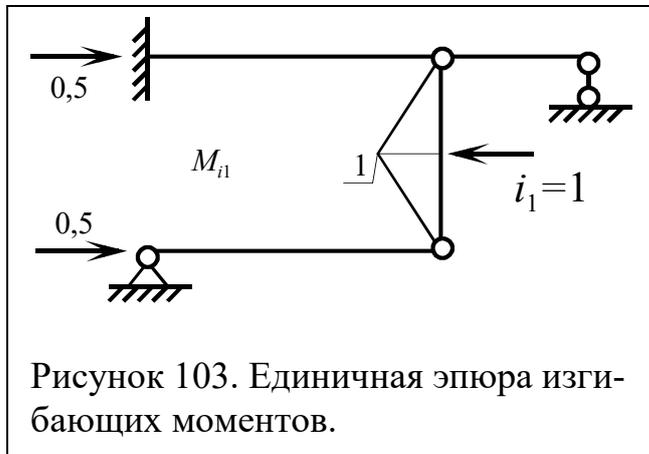
$$\sum F_x = 19,89 + 4,11 - 24 = 24 - 24 = 0$$

$$\sum F_y = 18,13 + 12,32 + 19,5 - 10 - 40 = 49,95 - 50 = -0,05 \approx 0$$

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 19,89 \cdot 4 + 10 \cdot 6 + 40 \cdot 3 - 19,5 \cdot 9 - 24 \cdot 2 - 35,7 = \\ &= 259,56 - 259,2 = 0,36 \approx 0 \end{aligned}$$

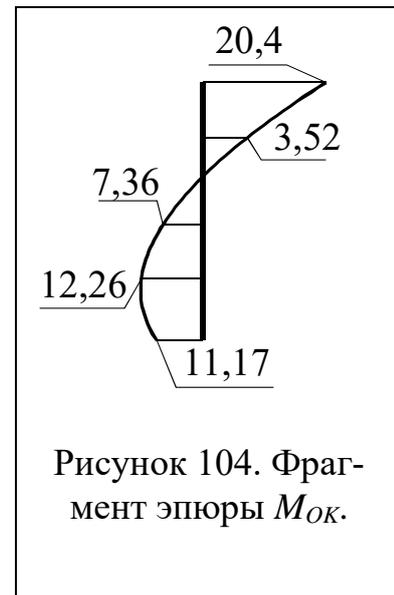
Проверка выполняется

Для определения перемещения сечения  $K$  необходимо приложить по направлению искомого перемещения единичную силу и построить эюру моментов в любой основной системе метода сил. Количество «лишних» связей в заданной раме равно трем.



Найдем горизонтальное перемещение сечения  $K$ . Основную систему метода сил образуем, врезав шарнир в узлы  $B$  (двойной шарнир) и  $E$  (простой шарнир).

Приложим горизонтальную единичную силу  $i_1 = 1$  и построим эюру моментов (рисунок 103). Далее единичная эюра перемножается с грузовой. На единичной эюре два ненулевых участка, а грузовая эюра на этих участках представляет собой квадратную параболу. Поэтому, чтобы использовать



формулу Симпсона, необходимо вычислить ординаты еще и в четвертях пролета стойки (рисунок 104). Перемножая эпюры, получим

$$\Delta_{1P} = [M_{OK} * M_{i1}] = \frac{2 \cdot 2}{6EJ_p} [0 \cdot 20,4 - 4 \cdot 0,5 \cdot 3,52 + 1 \cdot 7,36] +$$

$$+ \frac{2 \cdot 2}{6EJ_p} [1 \cdot 7,36 + 4 \cdot 0,5 \cdot 12,26 + 0 \cdot 11,17] = \frac{21,47}{EJ_p}$$

Для вертикального перемещения к сечению следует приложить вертикальную единичную силу и построить эпюру моментов (рисунок 105). Перемножая эпюры получим вертикальное перемещение сечения  $K$ :

$$\Delta_{2P} = [M_{OK} * M_{i2}] = \frac{6}{6EJ_p} [6 \cdot 35,7 - 4 \cdot 3 \cdot 1,25 + 0 \cdot 38,2] = \frac{199,2}{EJ_p}$$

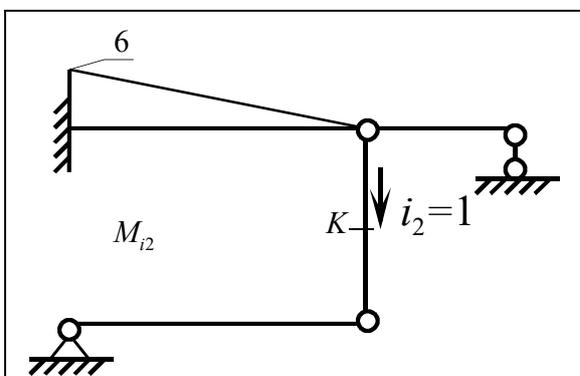


Рисунок 105. Единичная эпюра изгибающих моментов.

Заметим, что это перемещение совпадает с неизвестным

$$Z_3 = \frac{8,28}{i} = \frac{8,28 \cdot 24}{EJ_p} = \frac{198,7}{EJ_p}$$

Расхождение в 0,25% связано с погрешностью округления.

Расчет рамы на осадку опор. Примем осадку, показанную на рисунке 106, изгибную жесткость ригеля

$EJ_p = 6000 \text{ кНм}^2$ . Для построения грузовой эпюры от осадки опор изображаем деформированный вид основной системы метода перемещений (рисунок

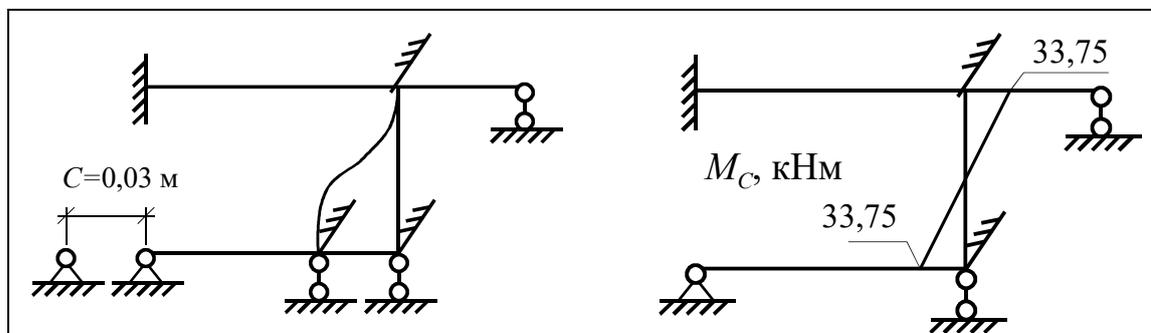


Рисунок 106. Деформированный вид основной системы и грузовая эпюра моментов от осадки опор.

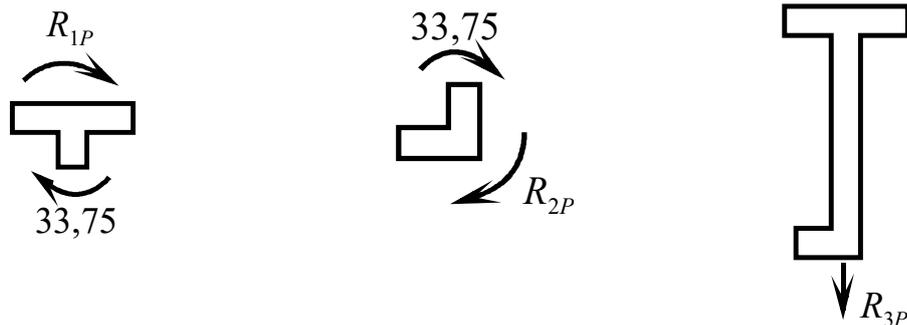


Рисунок 107. Усилия, действующие на элементы рамы от осадки опор.

106). Ординаты вычисляем, используя, табличные эпюры приложения Г.

Предварительно получим погонную жесткость. При приведении жесткостей было принято  $i = \frac{EJ_P}{24} = \frac{6000}{24} = 250 \text{кНм}$ . В основной системе деформирован только стержень  $BE$ , следовательно, эпюра будет только на этом стержне. Табличная ордината для случая «заделка-заделка, смещение» равна  $\frac{6i}{l}$ . Учтем, что  $i_{BE} = 3i$ , и что смещение равно не единице, а  $0,03\text{м}$ . Тогда для

ординаты получим  $\frac{6 \cdot 3 \cdot 250}{4} \cdot 0,03 = 33,75 \text{кН}$ .

Далее, рассматривая равновесие узлов и стойки, найдем грузовые коэффициенты  $R_{1P} = -33,75$ ,  $R_{2P} = -33,75$ ,  $R_{3P} = 0$  (рисунок 107).

Запишем и решим систему канонических уравнений.

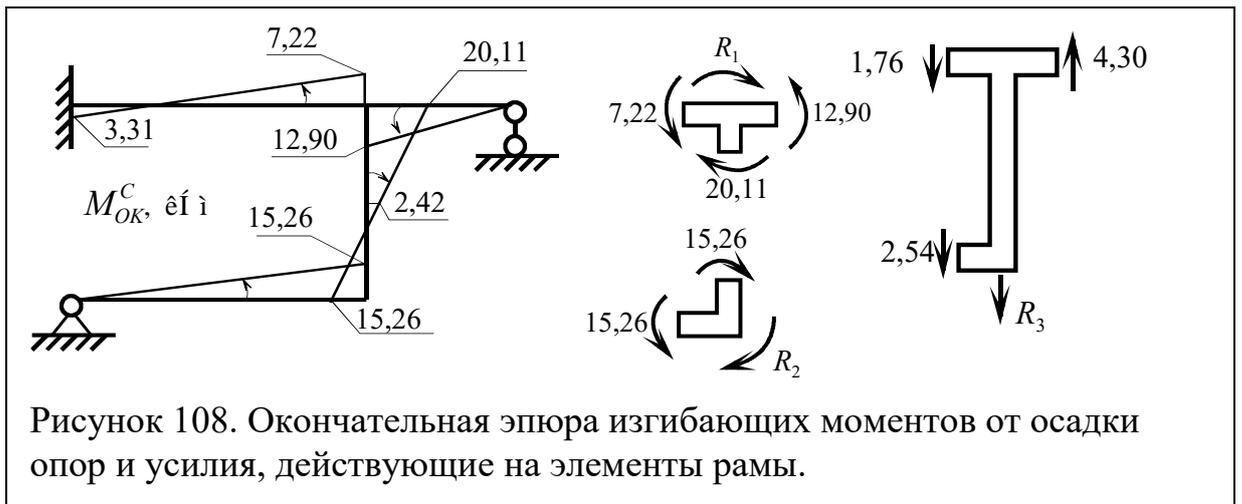
$$52iZ_1 + 6iZ_2 + 4iZ_3 - 33,75 = 0$$

$$6iZ_1 + 24iZ_2 - 2iZ_3 - 33,75 = 0$$

$$4iZ_1 - 2iZ_2 + 4,333iZ_3 + 0 = 0$$

После того, как вычислены  $Z_1 = \frac{0,488}{i}$ ,  $Z_2 = \frac{1,297}{i}$ ,  $Z_3 = \frac{0,148}{i}$ , строим

окончательную эпюру изгибающих моментов, складывая единичные и грузовую  $M_{ок}^C = M_1Z_1 + M_2Z_2 + M_3Z_3 + M_C$  (рисунок 108). Построенную эпюру необходимо проверить. Как и при расчете на действие нагрузки следует убедиться, что реакции в дополнительных связях отсутствуют. Вычисление реакций также показано на рисунке 108.



$$R_1 = 12,90 + 7,22 - 20,11 = 20,12 - 20,11 = 0,01 \approx 0,$$

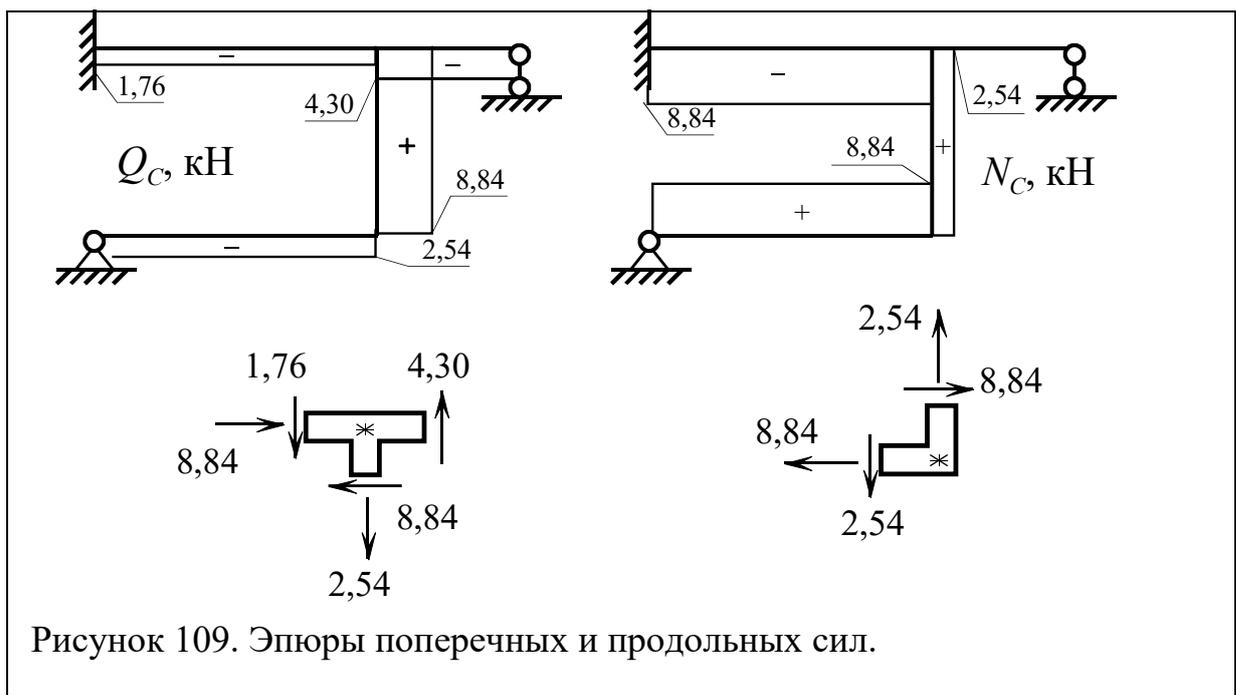
$$R_2 = 15,26 - 15,26 = 0,$$

$$R_3 = 4,30 - 1,76 - 2,54 = 4,30 - 4,30 = 0.$$

Проверка выполняется.

После построения и проверки эпюры изгибающих моментов строим эпюру поперечных сил по эпюре моментов. Эпюру продольных сил строим по равновесию узлов (рисунок 109).

После построения всех эпюр найдем опорные реакции и проверим равновесие рамы (рисунок 110). Внешней нагрузки нет, поэтому равновесие



должно выполняться только под действием опорных реакций.

$$\sum F_x = 8,84 - 8,84 = 0,$$

$$\sum F_y = 4,30 - 1,76 - 2,54 = 4,30 - 4,30 = 0,$$

$$\sum M_A = 4,30 \cdot 9 - 3,31 - 8,84 \cdot 4 = 38,70 - 38,67 = 0,03 \approx 0.$$

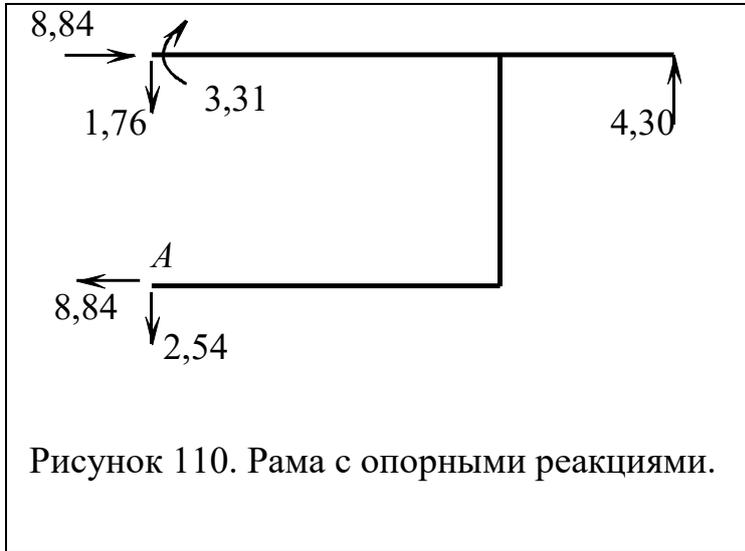


Рисунок 110. Рама с опорными реакциями.

Найдем перемещения сечения  $K$  от осадки опор. Для этого используем единичные эпюры изгибающих моментов (рисунки 103 и 105). Следует иметь в виду, что в отличие от нагрузки, при осадке опор перемещения вызваны не только деформацией стержней, но и

собственно осадкой.

Найдем горизонтальное перемещение. Заметим, что окончательная эпюра прямолинейна, а на единичной легко определяются площадь (треугольник) и положение центра тяжести – посередине. Это позволяет использовать правило Верещагина и производить перемножение по одному участку:

$$\begin{aligned} \Delta_{1C} &= [M_{OK}^C * M_{il}] - \sum_k R_{k1} C_k = \\ &= -\frac{2}{EJ_P} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2,42 - (-0,5 \cdot 0,03) = -\frac{9,68}{6000} + 0,015 = -0,0134\text{м} \end{aligned}$$

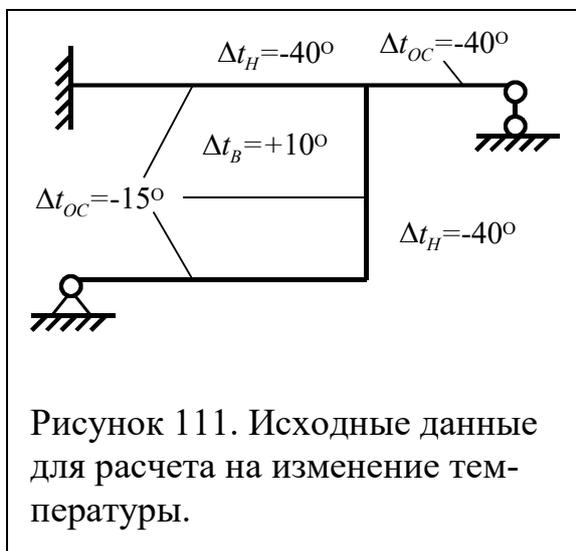


Рисунок 111. Исходные данные для расчета на изменение температуры.

Вертикальное перемещение

$$\Delta_{2C} = \frac{24 \cdot 0,148}{EJ_P} = Z_3 = \frac{0,148}{i} = 5,92 \cdot 10^{-4} \text{ м}$$

Расчет рамы на действие изменения температуры. Изменение температуры показано на рисунке 111, высота сечения для стойки и для ригеля одинаковы и равна  $h = 0,5\text{м}$ , коэффициент темпера-

турного расширения  $\alpha = 10^{-5} 1/^\circ\text{C}$ . От неравномерного изменения температуры в основной системе метода перемещений появляются изгибающие моменты. Ординаты эпюры вычисляем по таблице реакций (приложение Г). На

стержне  $AB$  изгибающий момент равен  $M_{AB} = \frac{10^{-5} \cdot 6000 \cdot (10 - (-40))}{0,5} = 6 \text{ кНм}$ ,

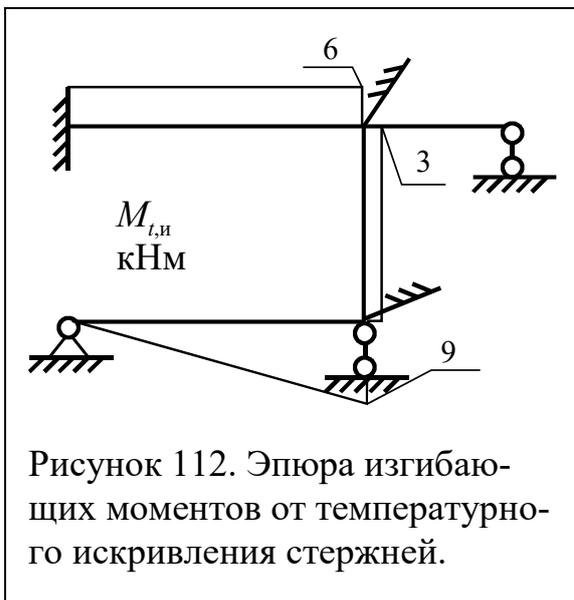
на стержне  $DE$  получим  $M_{DE} = \frac{3 \cdot 10^{-5} \cdot 6000 \cdot (10 - (-40))}{2 \cdot 0,5} = 9 \text{ кНм}$ , и на

стержне  $BE$

$$M_{BE} = \frac{10^{-5} \cdot 3000 \cdot (10 - (-40))}{0,5} = 3 \text{ кНм}.$$

На стержне  $BC$  момент равен нулю, так как разность температур равна нулю.

Полученные ординаты откладываются в сторону меньшего (с учетом знака) изменения температуры. Эпюра показана на рисунке 112



В отличие от расчета на нагрузку и осадку опор, при расчете на изменение

температуры следует учитывать осевое удлинение-укорочение стержней. Для этого необходимо для каждого стержня найти изменение температуры волокон нейтрального слоя. В данном случае стержни  $AB$ ,  $BE$  и  $DE$  находятся в

одинаковых условиях и  $\Delta t_{OC} = \frac{-40^\circ + 10^\circ}{2} = -15^\circ$ , для стержня  $BC$

$\Delta t_{OC} = \frac{-40^\circ - 40^\circ}{2} = -40^\circ$ , т.е. все стержни укорачиваются. Из деформированного вида от температурной осевой деформации получим эпюру изгибающих моментов (рисунок 113).

Так как в горизонтальном направлении узлы  $B$  и  $E$  перемещаются одинаково, то стержень  $BE$  не искривляется и в нем усилий не будет. Как видно из деформированного вида, для вычисления ординат эпюры необходимо найти  $\Delta l_{BE} = \alpha l_{BE} |\Delta t_{OC}| = 10^{-5} \cdot 4 \cdot 15 = 6 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ . На

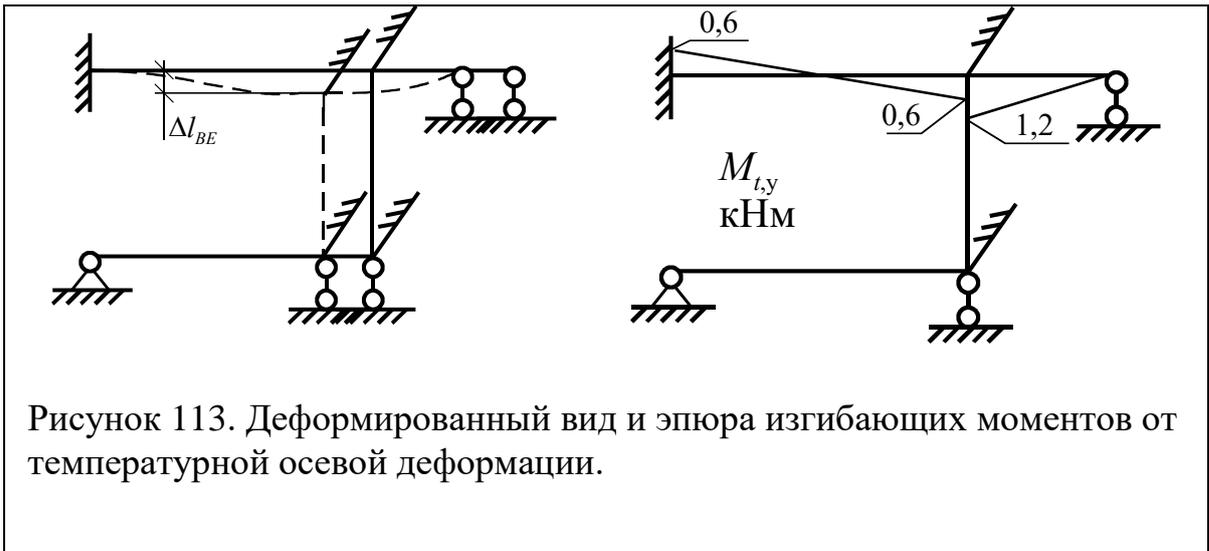


Рисунок 113. Деформированный вид и эпюра изгибающих моментов от температурной осевой деформации.

участке  $AB$  получим величину момента (приложение Г)

$$\frac{6i_{AB}}{l} \Delta l_{BE} = \frac{6 \cdot 4 \cdot 250}{6} \cdot 6 \cdot 10^{-4} = 0,6 \text{ кНм},$$

на участке  $BE$  получим

$$\frac{3i_{BC}}{l} \Delta l_{BE} = \frac{3 \cdot 8 \cdot 250}{3} \cdot 6 \cdot 10^{-4} = 1,2 \text{ кНм}.$$

Грузовую эпюру от изменения температуры  $M_t$  получим, складывая эпюры  $M_{t,x}$  и  $M_{t,y}$  (рисунок 114). Вычисляя грузовые коэффициенты получим  $R_{1T} = 5,4 + 1,2 - 3 = 3,6$ ,  $R_{2T} = 3 - 9 = -6$ ,  $R_{3T} = 0,2 + 0,4 + 1,5 = 2,1$ . Записываем и решаем систему канонических уравнений:

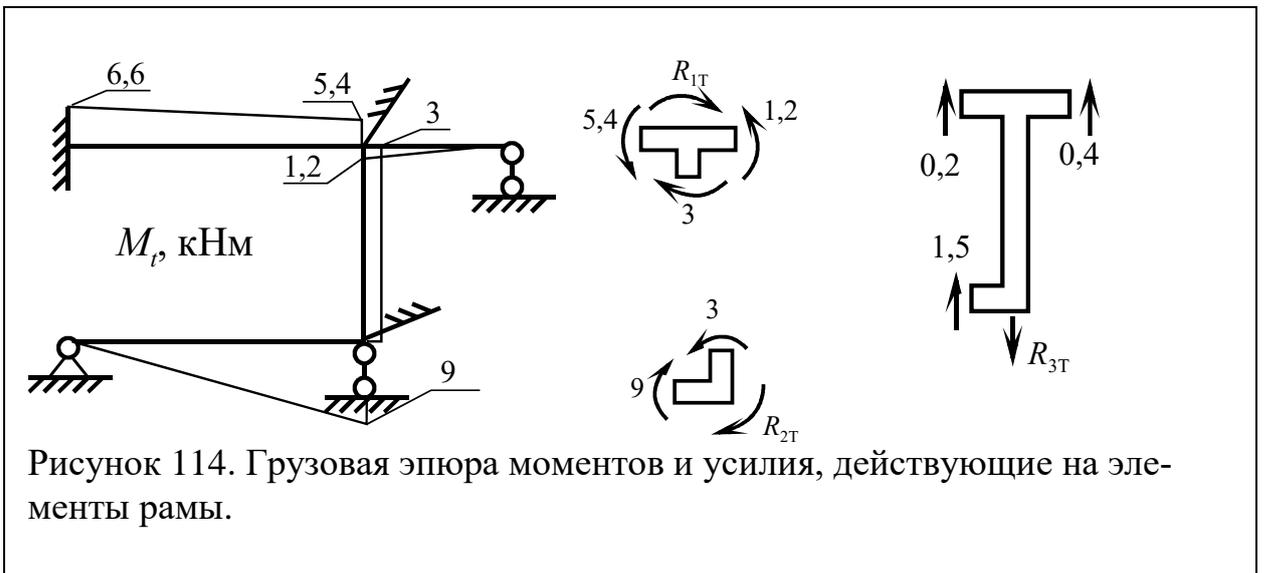


Рисунок 114. Грузовая эпюра моментов и усилия, действующие на элементы рамы.

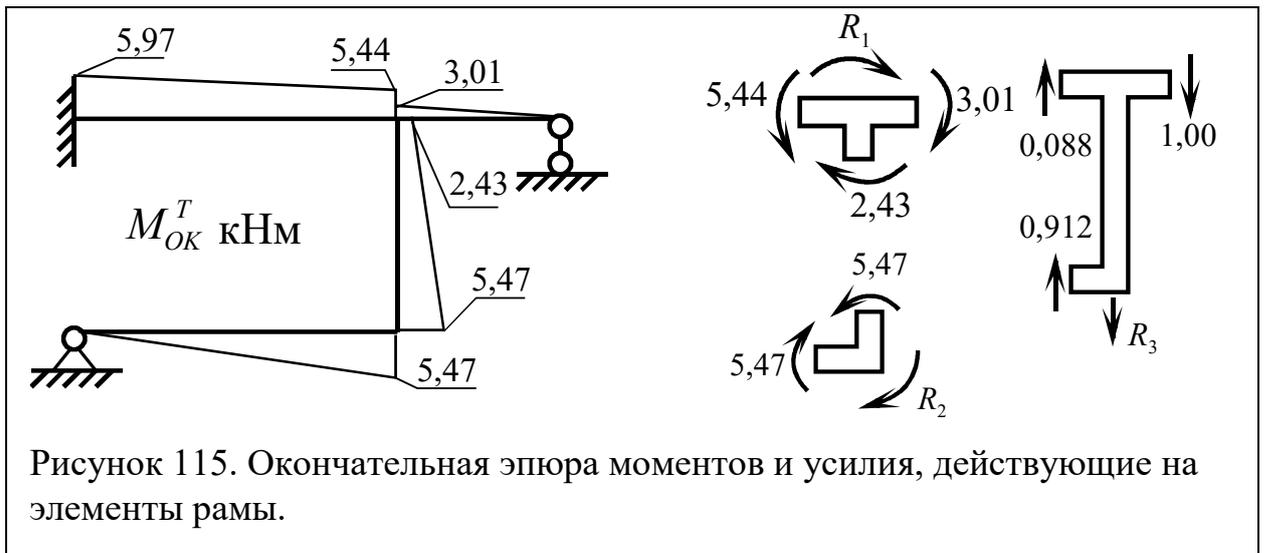
$$52iZ_1 + 6iZ_2 + 4iZ_3 + 3,6 = 0$$

$$6iZ_1 + 24iZ_2 - 2iZ_3 - 6 = 0$$

$$4iZ_1 - 2iZ_2 + 4,333iZ_3 + 2,1 = 0$$

$$Z_1 = -\frac{0,074}{i}, Z_2 = \frac{0,243}{i}, Z_3 = -\frac{0,304}{i}$$

Строим окончательную эпюру изгибающих моментов, складывая единичные и грузовую  $M_{OK}^T = M_1Z_1 + M_2Z_2 + M_3Z_3 + M_t$  (рисунок 115).



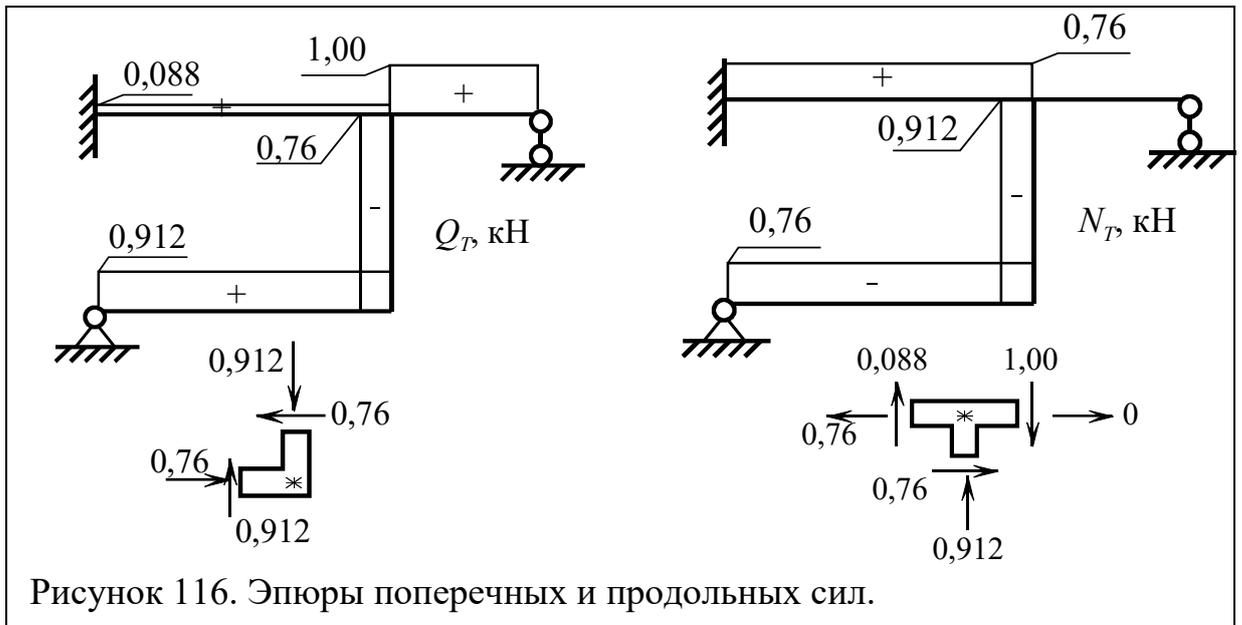
Для проверки найдем реакции в дополнительных связях, и убедимся, что они равны нулю:

$$R_1 = 5,44 - 2,43 - 3,01 = 5,44 - 5,44 = 0,$$

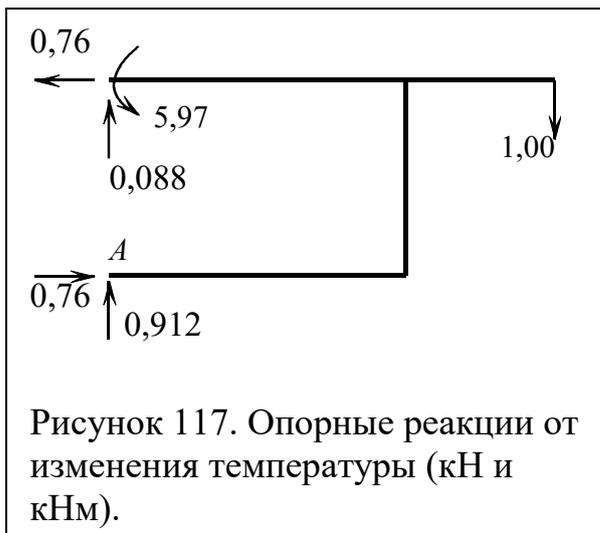
$$R_2 = 5,47 - 5,47 = 0,$$

$$R_3 = 0,088 + 0,912 - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Проверка выполняется.



С помощью эпюры моментов строим эпюру поперечных сил по тангенсу наклона эпюры, а также эпюру продольных сил по равновесию узлов. Эпюры



показаны на рисунке 116.

После построения всех эпюр найдем опорные реакции и проверим равновесие рамы (рисунок 117).

$$\sum F_x = 0,76 - 0,76 = 0$$

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0,088 + 0,912 - 1,00 = \\ &= 1,00 - 1,00 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0,76 \cdot 4 + 5,97 - 1,00 \cdot 9 = \\ &= 9,01 - 9 = 0,01 \approx 0 \end{aligned}$$

### Задача 15. Расчет рамы методом перемещений.

В заданной раме требуется

1. Образовать основную систему метода перемещений.
2. Построить единичные и грузовую эпюры изгибающих моментов и найти коэффициенты канонических уравнений метода перемещений.
3. Решить систему канонических уравнений метода перемещений.
4. Построить окончательную эпюру изгибающих моментов и проверить ее.
5. Построить эпюры поперечных и продольных сил и проверить равновесие рамы.

Исходные данные принять по таблице 16, расчетная схема выбирается по рисунку 118.

Таблица 16.

Алфавит	$l_1$ , м	$l_2$ , м	$h$ , м	$q_1/q_2$ , кН/м	$P_1/P_2$ , кН	$J_P/J_C$
а б в	2	2	2	0/6	10/0	1,0
г д е	3	3	3	8/0	0/15	1,5
ж з и й	4	4	4	0/10	20/0	2,0
к л м	5	5	5	12/0	0/25	2,5
н о п	6	6	6	0/14	30/0	3,0
р с т	2	2	2	6/0	0/10	1,0
у ф х	3	3	3	0/8	15/10	1,5
ц ч ш	4	4	4	10/0	0/20	2,0
щ ь ы ь	5	5	5	0/12	25/0	2,5
э ю я	6	6	6	14/0	0/30	3,0

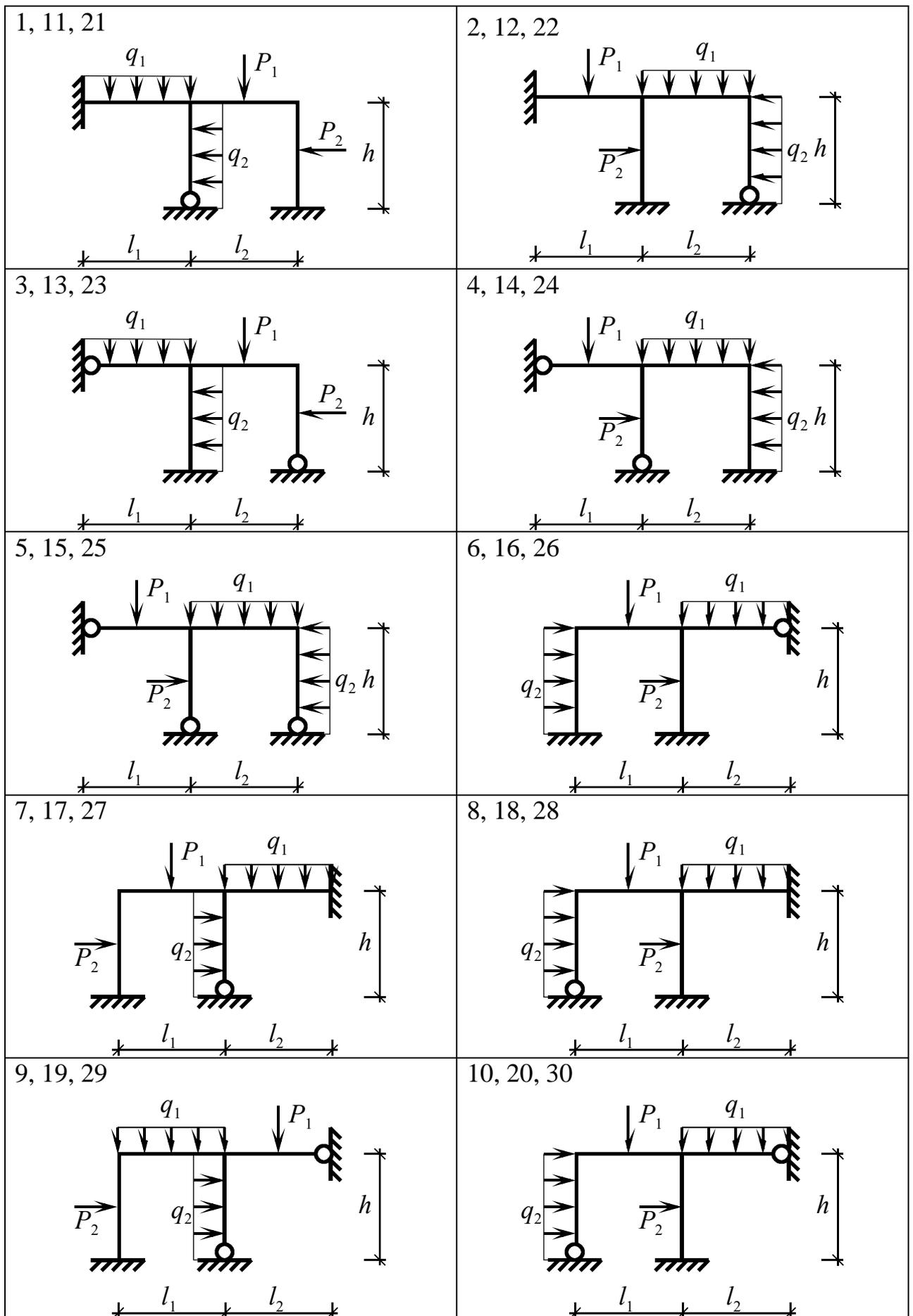
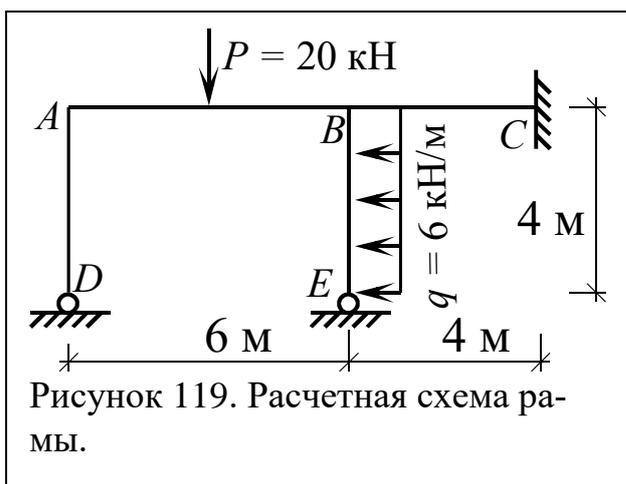


Рисунок 118. Расчетные схемы к задаче 15.



### Пример

Рассмотрим раму, показанную на рисунке 119. отношение жесткостей ригеля и стойки  $J_P/J_C = 2$ .

Основную систему метода перемещений получим, разбивая раму на табличные балки, которые приведены в приложении Г. Для этого

необходимо в каждый жесткий узел установить угловую дополнительную связь (ДС1 и ДС2), т.е. необходимы две дополнительные связи. Основная система показана на рисунке 120. Запишем канонические уравнения:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0 \end{cases}$$



Найдем погонные жесткости стержней.

Стержень  $AB$  имеет погонную жесткость

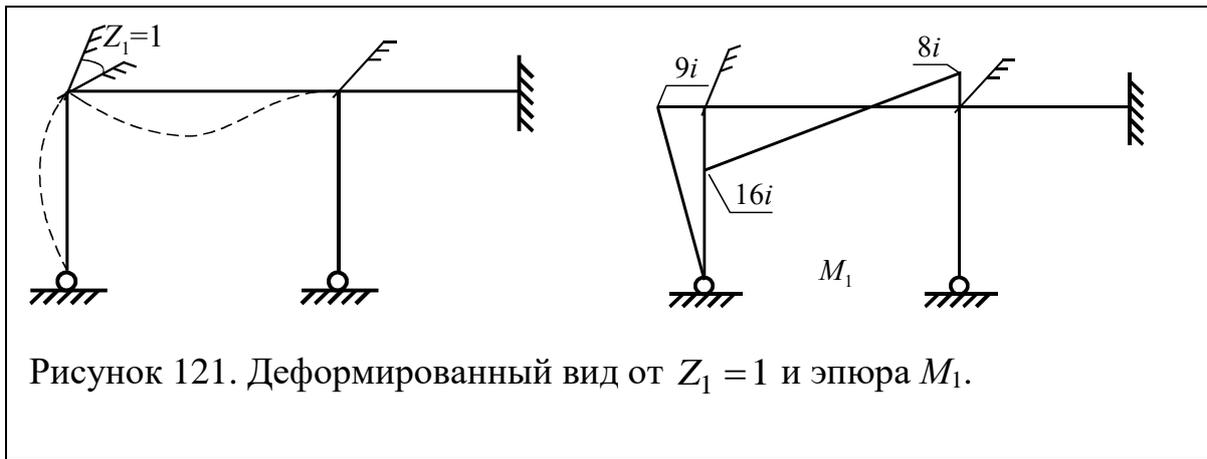
$$i_{AB} = \frac{EJ_P}{6}, \text{ для стержня } BC \quad i_{BC} = \frac{EJ_P}{4} \text{ и для}$$

$$\text{стержней } AD \text{ и } BE \quad i_{AD} = i_{BE} = \frac{EJ_C}{4} = \frac{EJ_P}{8}$$

$$\text{Примем } i = \frac{EJ_P}{24}, \text{ тогда } i_{AB} = 4i, \quad i_{BC} = 6i,$$

$i_{AD} = i_{BE} = 3i$ . Эти значения погонных жесткостей покажем на основной системе.

Для вычисления единичных и грузовых коэффициентов канонической системы уравнений следует построить единичные и грузовую эпюры изгибающих моментов. Для построения эпюры  $M_1$  следует задать первой дополнительной связи единичное перемещение  $Z_1 = 1$  и изобразить примерный деформированный вид стержней (рисунок 121). По деформированному виду определяем положение растянутых волокон, и строим эпюру, используя таб-



лицу реакций, приведенную в приложении Г. Эпюра показана на рисунке 121.

Вычислим ординаты эпюры  $M_1$ . Для стержня  $AB$  схема «заделка-заделка, поворот». В этом случае из таблицы реакций получаем для повернутой заделки (узел  $A$ ) изгибающий момент равный  $4i_{AB} = 4 \cdot 4i = 16i$ , для неподвижной заделки получим  $2i_{AB} = 2 \cdot 4i = 8i$ . Для стержня  $AD$  схема «заделка-шарнир, поворот». В повернутом узле  $A$  получим  $3i_{AD} = 3 \cdot 3i = 9i$ .

Аналогично задаем единичное перемещение  $Z_2 = 1$  и по деформированному виду и приложению В строим эпюру  $M_2$  (рисунок 122). Для грузовой эпюры деформированный вид не обязателен, достаточно «правила паруса». Ординаты также как и для единичных эпюр вычисляем по таблице реакций. Так как на стержнях  $AD$  и  $BC$  не действует внешняя нагрузка, то эпюры изгибающих моментов на этих стержнях отсутствуют. На стержень  $AB$  действует сосредоточенная сила, и по таблице получим в узлах  $A$  и  $B$  момент  $\frac{20 \cdot 6}{8} = 15$  кНм. На участке  $BE$  распределенная нагрузка дает в узле  $B$  момент  $\frac{6 \cdot 4^2}{8} = 12$  кНм. Полученная эпюра показана на рисунке 123.

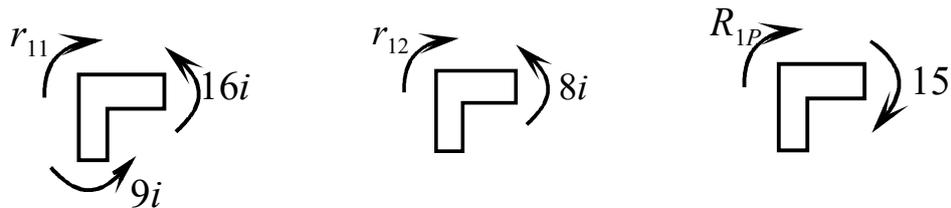


Рисунок 124. Усилия, действующие на узел 1.

Определение единичных и грузовых коэффициентов канонических

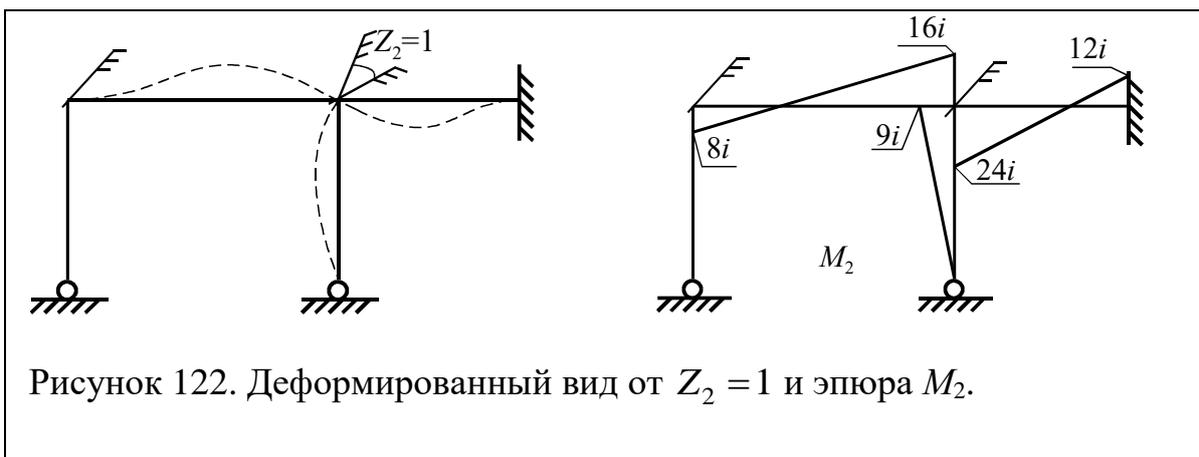


Рисунок 122. Деформированный вид от  $Z_2 = 1$  и эпюра  $M_2$ .

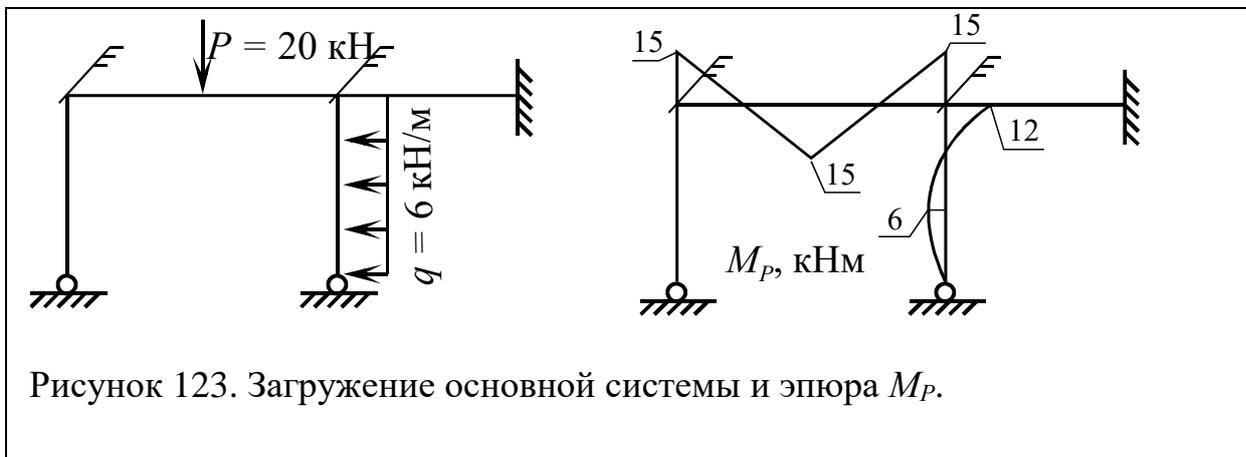


Рисунок 123. Загружение основной системы и эпюра  $M_P$ .

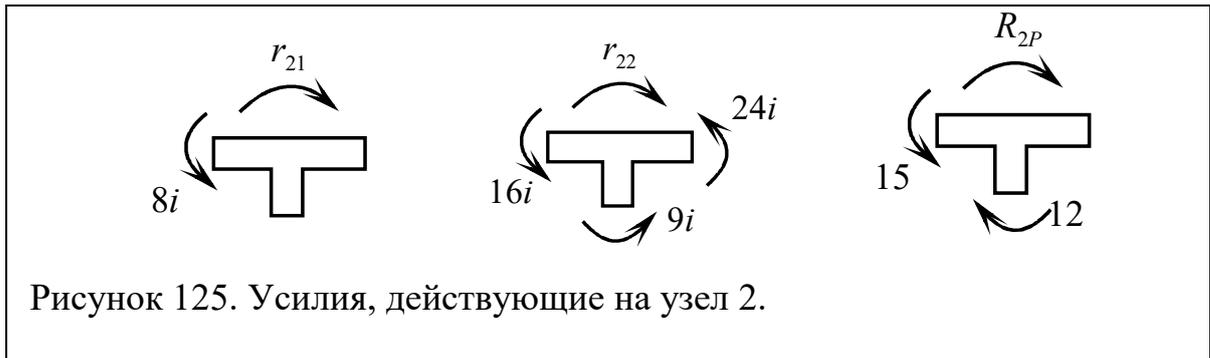
уравнений производится по эпюрам, используя уравнения равновесия для жестких узлов. Для этого вырезаем узлы, в которых наложены дополнительные связи. На рисунке 124 показано вычисление коэффициентов  $r_{11}$ ,  $r_{12}$  и  $R_{1P}$ . Вырезан узел  $A$  с дополнительной связью 1 из эпюр  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_P$ . Моменты берем непосредственно с эпюр.

Из равновесия узлов находим  $r_{11} = 16i + 9i = 25i$ ,  $r_{21} = 8i$ ,  $R_{1P} = -15$ . Аналогично из узла  $B$  найдем коэффициенты  $r_{21}$ ,  $r_{22}$  и  $R_{2P}$ . Для этого вырезаем дополнительную связь 2 из эпюр  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_P$  (рисунок 125).

Из равновесия узлов получим  $r_{21} = 8i$ ,  $r_{22} = 16i + 9i + 24i = 49i$ ,  
 $R_{2p} = 15 - 12 = 3$ .

Проверим выполнение 1-й теоремы Рэлея:  $r_{12} = r_{21}$

Решим систему канонических уравнений метода перемещений:



$$25iZ_1 + 8iZ_2 - 15 = 0$$

$$8iZ_1 + 49iZ_2 + 3 = 0$$

Получим значения неиз-

вестных  $Z_1 = \frac{0,654}{i}$ ,

$Z_2 = -\frac{0,168}{i}$ . Построим окончательную эпюру изгибающих

моментов. Для этого используется гипотеза о независимости

действия сил, и окончательно

момент можно получить сложением

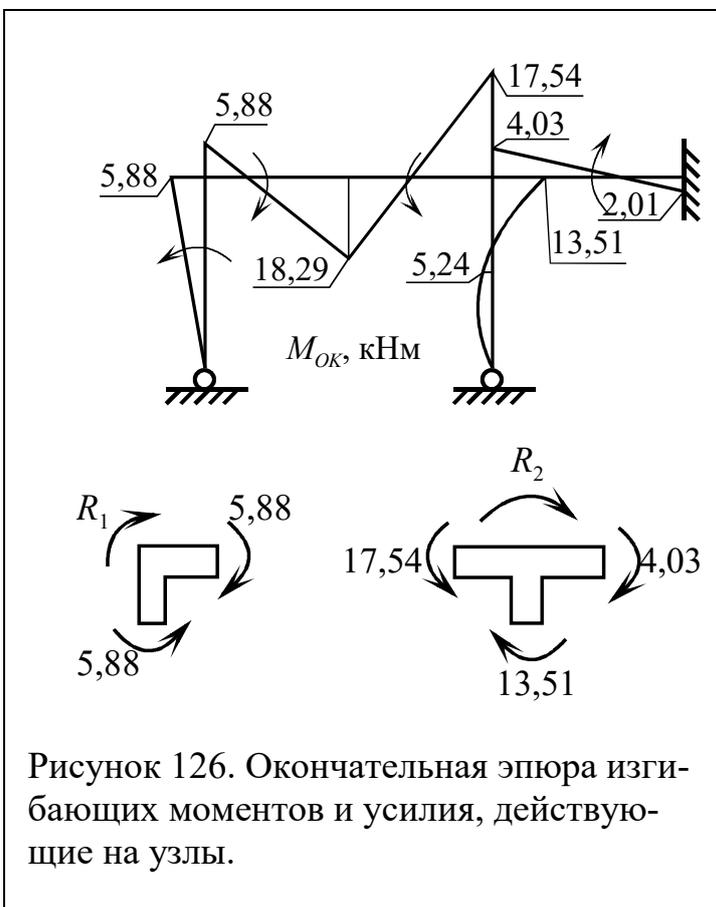
эпюр

$M_{OK} = M_1Z_1 + M_2Z_2 + M_p$ . Так,

например, в сечении ригеля

около узла А получим

$M_{OK} = 16i \cdot \frac{0,654}{i} + 8i \cdot \left(-\frac{0,168}{i}\right) - 15 = -$



кНм. Аналогичные вычисления выполняются и для остальных сечений. По полученным данным строится окончательная эпюра моментов (рисунок 126).

Построенную эпюру необходимо проверить. Так как основная система образована путем добавления дополнительных связей, которые в конструкции отсутствуют, то следует убедиться в том, что реакции в этих связях равны нулю. Для этого вырежем узлы, как поступали при вычислении коэффициентов канонических уравнений (рисунок 126).

Из условия равновесия узлов находим реакции в дополнительных связях:  $R_1 = 5,88 - 5,88 = 0$  и  $R_2 = 17,54 - 13,51 - 4,03 = 17,54 - 17,54 = 0$ .

Построим эпюру поперечных сил. Для этого используем эпюру моментов. На участках, где эпюра моментов прямолинейна, поперечную силу найдем как тангенс угла наклона эпюры моментов  $Q = \frac{dM}{dx}$ . При этом знак определяется по мнемоническому правилу: следует мысленно повернуть стержень до эпюры вокруг точки, где момент равен нулю, если поворот происходит по ходу часовой стрелки, то  $Q > 0$ , и наоборот.

На участке  $AD$  получаем  $Q = -\frac{5,88}{4} = -1,47$  кН, на участке  $BC$

$Q = \frac{4,03 + 2,01}{4} = 1,51$  кН. Участок  $AB$  состоит

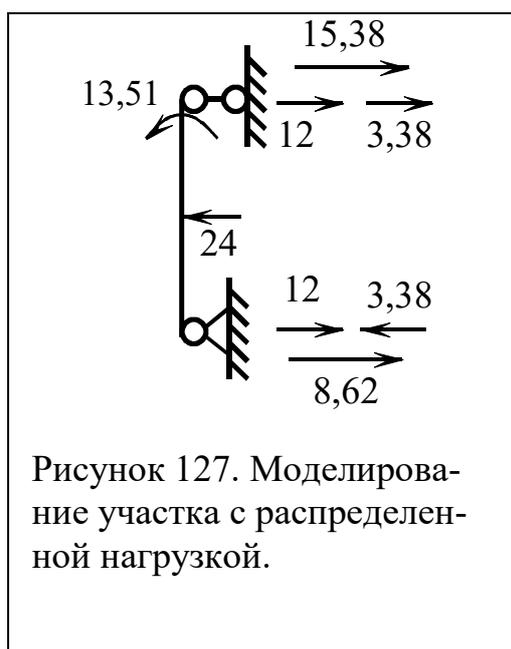
из двух прямолинейных. На левом получаем

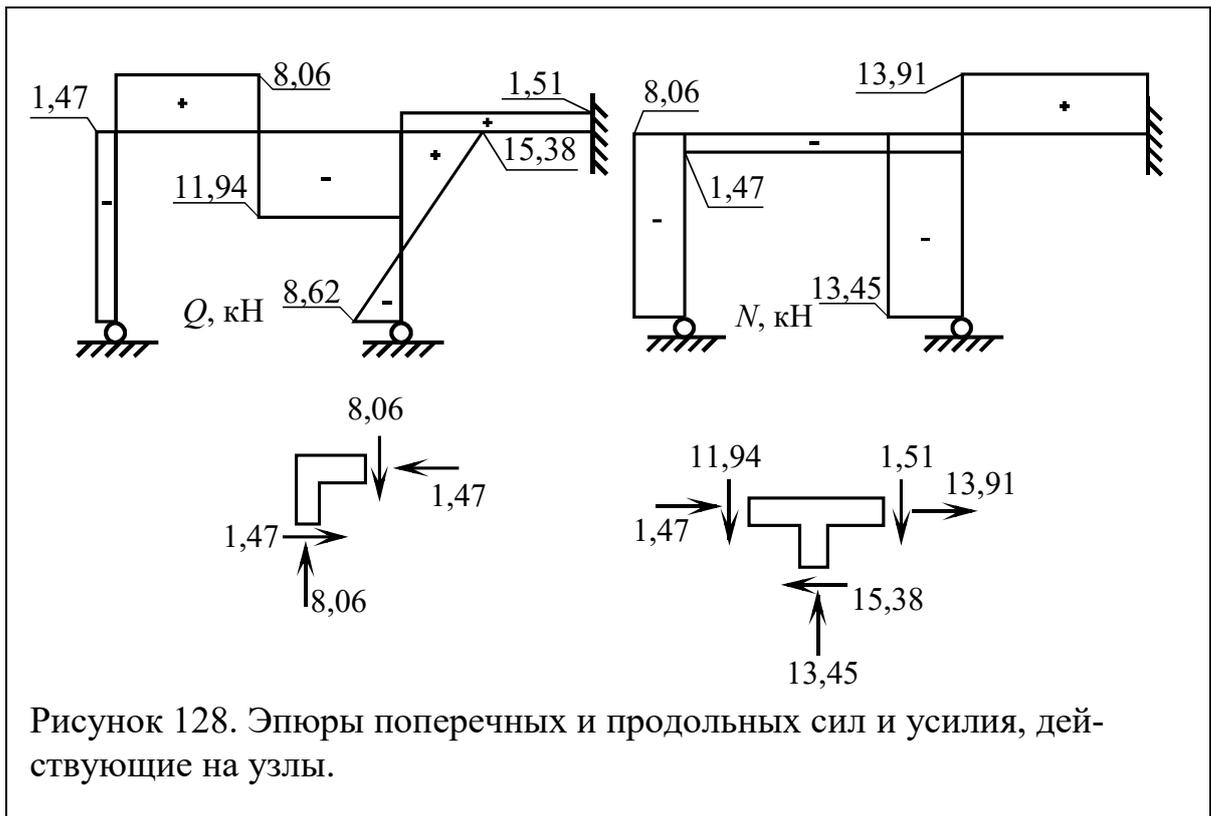
$Q = \frac{5,88 + 18,29}{3} = 8,06$  кН, а на правом

$Q = -\frac{18,29 + 17,54}{3} = -11,94$  кН. Скачок на

участке  $AB$  эпюры  $Q$  равен силе  $P$   $8,06 + 11,94 = 20$  кН.

На участке  $BE$  с распределенной нагрузкой поперечная сила изменяется линейно. Для того чтобы найти ординаты по





концам участка следует рассмотреть балку на двух опорах, на которую действует заданная нагрузка и моменты по концам, численно равные моментам по концам участка (рисунок 127). Находим опорные реакции в этой балке, причем реакции определяем как сумму отдельно от равнодействующей внешней нагрузки и от концевых моментов. Эпюра поперечных сил показана на рисунке 128. Продольные силы найдем из равновесия узлов (рисунок 128). Начинать определение продольных сил следует с рассмотрения равновесия левого узла, так как в этом узле две неизвестные силы. После того как будет найдена продольная сила на участке  $AB$ , можно вырезать правый узел, найти продольные силы и построить эпюру  $N$ .

Далее по эпюрам  $M_{OK}$ ,  $Q$  и  $N$  найдем опорные реакции и проверим равновесие рамы в целом (рисунок 129).

$$\sum F_x = 13,91 + 1,47 + 8,62 - 24 = 24 - 24 = 0,$$

$$\sum F_y = 8,06 + 13,45 - 20 - 1,51 = 21,51 - 21,51 = 0,$$

$$\sum M_F = 8,06 \cdot 3 + 13,91 \cdot 4 + 1,51 \cdot 7 - 24 \cdot 2 - 13,45 \cdot 3 - 2,01 = 90,39 - 90,36 = 0,03 \approx 0$$



**Задача 16.** Расчет балки методом перемещений на воздействие внешней нагрузки и осадки опор.

Требуется:

1. Определить количество дополнительных связей и изобразить основную систему.
2. Построить единичные и грузовые эпюры изгибающих моментов.
3. Вычислить коэффициенты системы канонических уравнений метода перемещений и решить ее (отдельно от нагрузки и от осадки опор).
4. Построить окончательные эпюры изгибающих моментов и выполнить проверку равновесия узлов.
5. Построить эпюру поперечных сил, найти опорные реакции и проверить равновесие балки.

Исходные данные принять по таблице 17, расчетная схема выбирается по рисунку 130.

Таблица 17.

Исходные данные к задаче 16.

Алфавит	$q_1/ q_2/ q_3$ , кН/м	$l$ , м	$EJ$ , кНм <sup>2</sup>	заданная осадка	величина осадки, (для линейных – м, для угловых – рад)
а б в	2/0/0	3	3000	$C_2$	0,01
г д е	0/2/0	4	4500	$C_1$	0,02
ж з и й	0/0/2	6	6000	$C_3$	0,03
к л м	3/0/0	8	7500	$C_4$	0,04
н о п	0/3/0	12	9000	$C_2$	0,06
р с т	0/0/3	3	3000	$C_1$	0,01
у ф х	6/0/0	4	4500	$C_3$	0,02
ц ч ш	0/6/0	6	6000	$C_4$	0,03
щ ь ы ь	0/0/6	8	7500	$C_1$	0,04
э ю я	0/0/4	12	9000	$C_3$	0,06

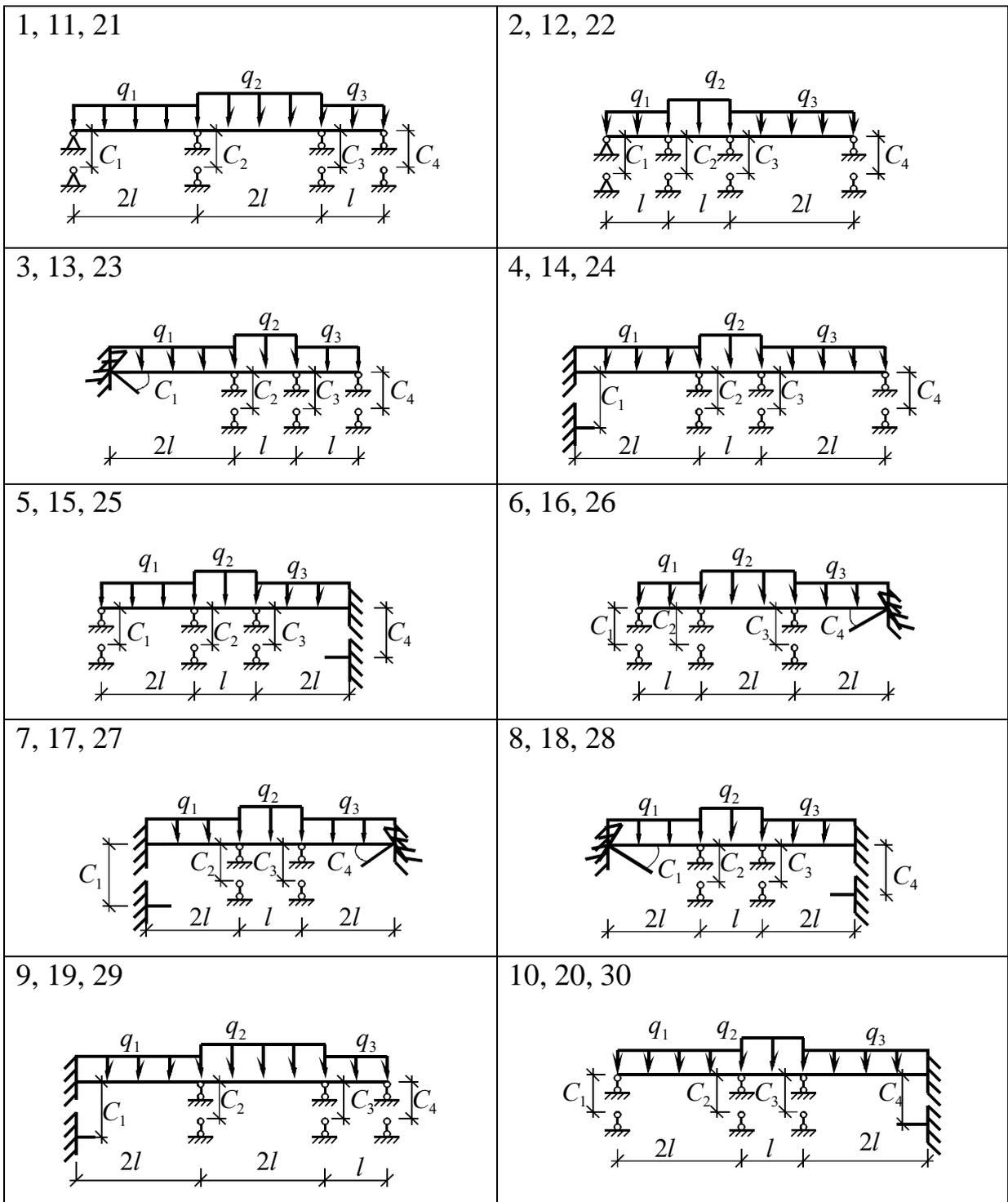
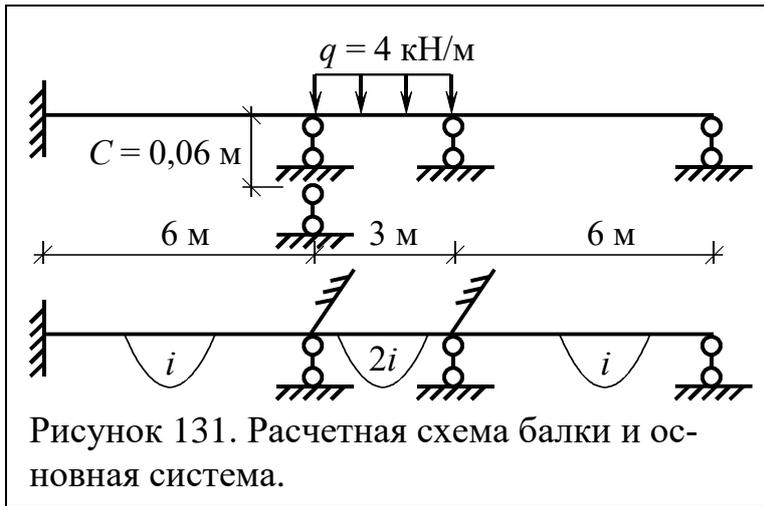


Рисунок 130. Расчетные схемы к задаче 16.



### Пример

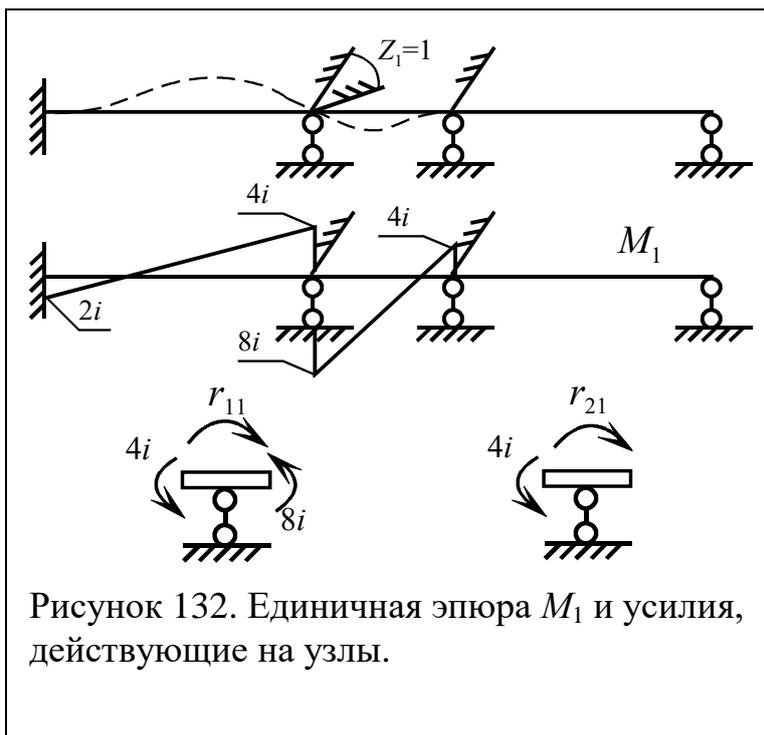
Рассмотрим балку, показанную на рисунке 131. Будем считать, что жесткость балки постоянна по всей длине. Основную систему получим, устанавливая плавающие заделки над промежуточными опорами, как показано на рисунке 131. Запишем канонические уравнения метода перемещений:

Выполним приведение погонных жесткостей. Для крайних пролетов получим  $i_1 = i_3 = \frac{EJ}{6}$ , а для среднего –  $i_2 = \frac{EJ}{3}$ . Примем  $i = \frac{EJ}{6}$ , тогда  $i_1 = i_3 = i$  и  $i_2 = 2i$ .

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0 \end{cases}$$

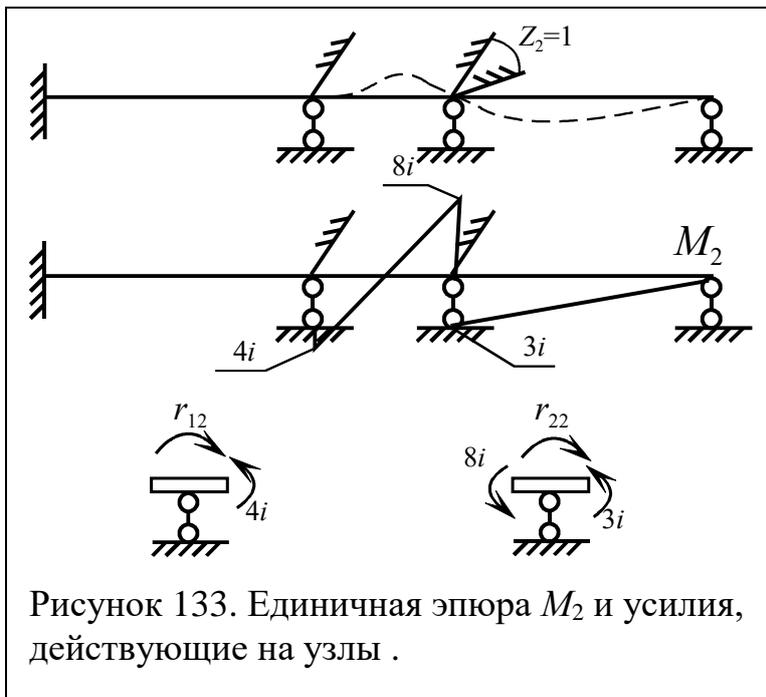
Задавая дополнительным связям единичные перемещения, получим

эпюры моментов и коэффициенты для канонических уравнений метода перемещений.



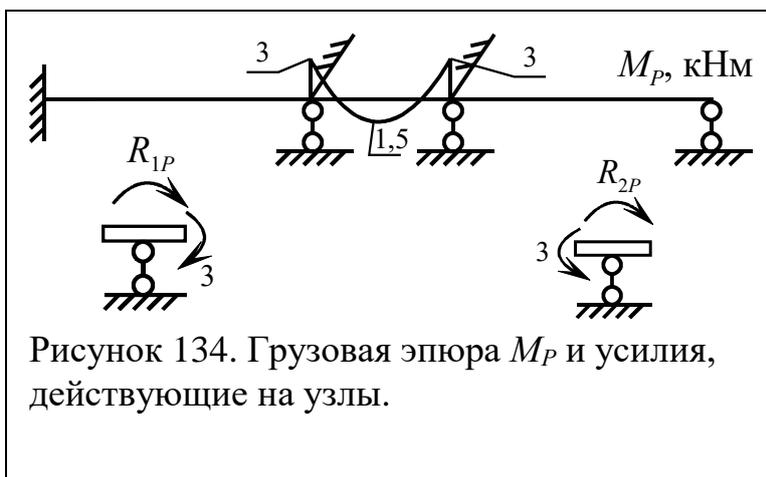
Задаем поворот первой дополнительной связи  $Z_1 = 1$ . Эпюра  $M_1$  показана на рисунке 132. Для единичных коэффициентов получаем величины  $r_{11} = 4i + 8i = 12i$  и  $r_{21} = 4i$ .

142



Далее задаем поворот  $Z_2 = 1$ , и получаем эюру  $M_2$  и коэффициенты  $r_{21} = 4i$  и  $r_{22} = 8i + 3i = 11i$  (рисунок 133).

Для вычисления грузовых коэффициентов построим грузовую эюру изгибающих моментов (рисунок 134). Получим  $R_{1P} = -3$  и  $R_{2P} = 3$ .



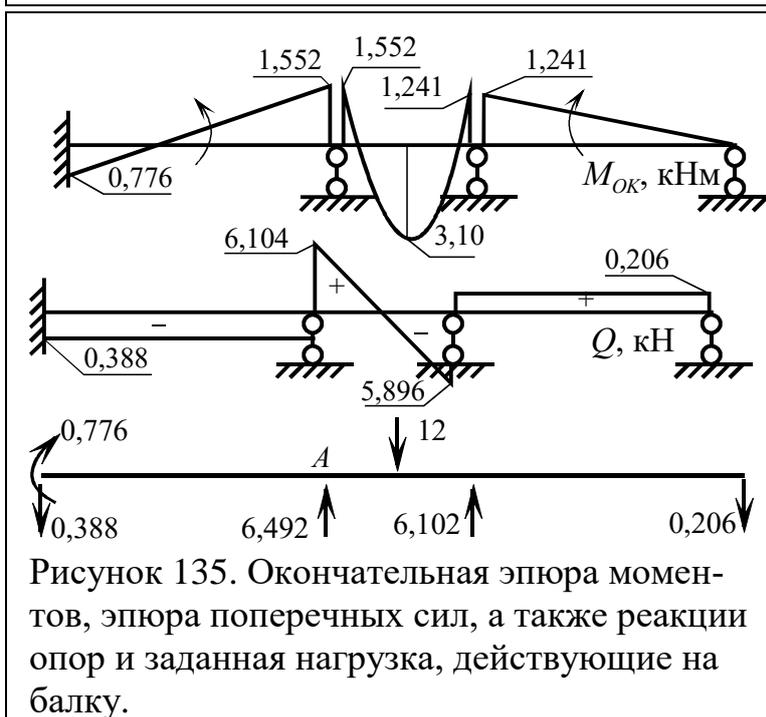
Запишем и решим систему канонических уравнений метода перемещений:

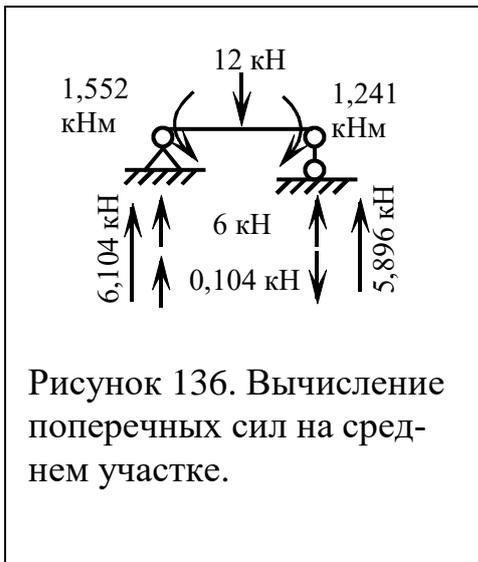
$$\begin{cases} 12iZ_1 + 4iZ_2 - 3 = 0 \\ 4iZ_1 + 11iZ_2 + 3 = 0 \end{cases}$$

$$Z_1 = \frac{0,388}{i}, \quad Z_2 = -\frac{0,414}{i}.$$

После вычисления неизвестных  $Z_1$  и  $Z_2$  построим окончательную эюру изгибающих моментов в балке:  $M_{OK} = M_1Z_1 + M_2Z_2 + M_P$ .

Вычисления ординат на опорах будем выполнять дважды – для сечений слева и справа от опоры. Это выполняется для проверки равенства нулю реакций в дополнительных



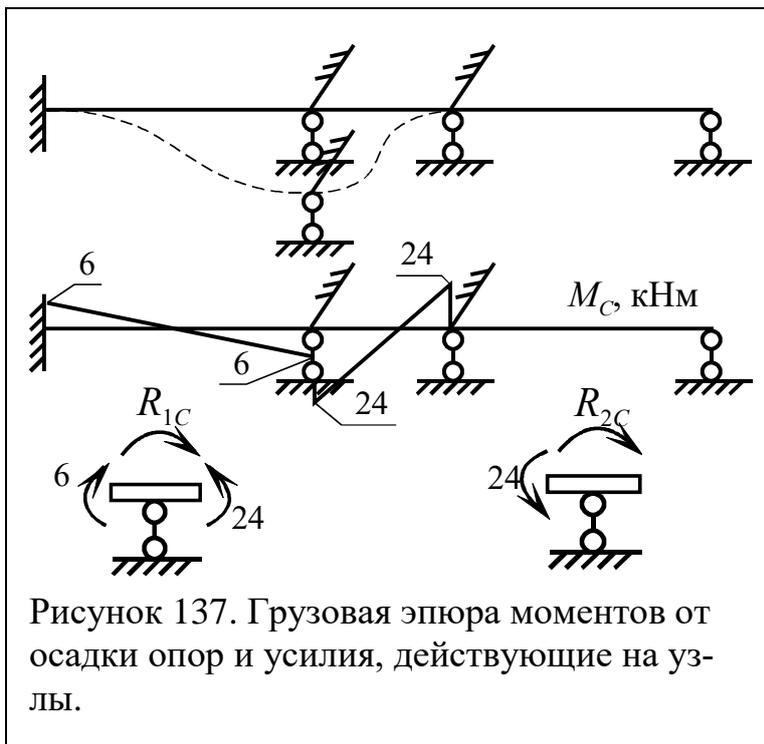


связях. После построения эпюры моментов получим эпюру поперечных сил, найдем опорные реакции по скачкам на эпюре  $Q$  и проверим равновесие балки. Эпюры  $M$  и  $Q$ , а также опорные реакции приведены на рисунке 135. Вычисление поперечных сил на участке с распределенной нагрузкой показано на рисунке 136.

Проверим равновесие балки:

$$\sum F_y = -0,388 + 6,492 - 12 + 6,102 - 0,206 = 12,594 - 12,594 = 0$$

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0,776 - 0,388 \cdot 6 + 12 \cdot 1,5 - 6,102 \cdot 3 + 0,206 \cdot 9 = \\ &= 20,63 - 20,634 = -0,004 \approx 0 \end{aligned}$$



Выполним расчет балки на воздействие осадки опор. Примем жесткость балки  $EJ = 6000 \text{ кНм}^2$ . Тогда получим погонную жесткость  $i = \frac{EJ}{6} = 100 \text{ кНм}$ . По заданной осадке опор изобразим деформированный вид основной системы, а по деформированному виду – эпюру изгибающих моментов (рисунок 137). Ординаты грузовой

эпюры найдем с помощью таблицы приложения Г, учитывая, что осадка равна не единице, а  $C = 0,06 \text{ м}$ . Получим для левого пролета

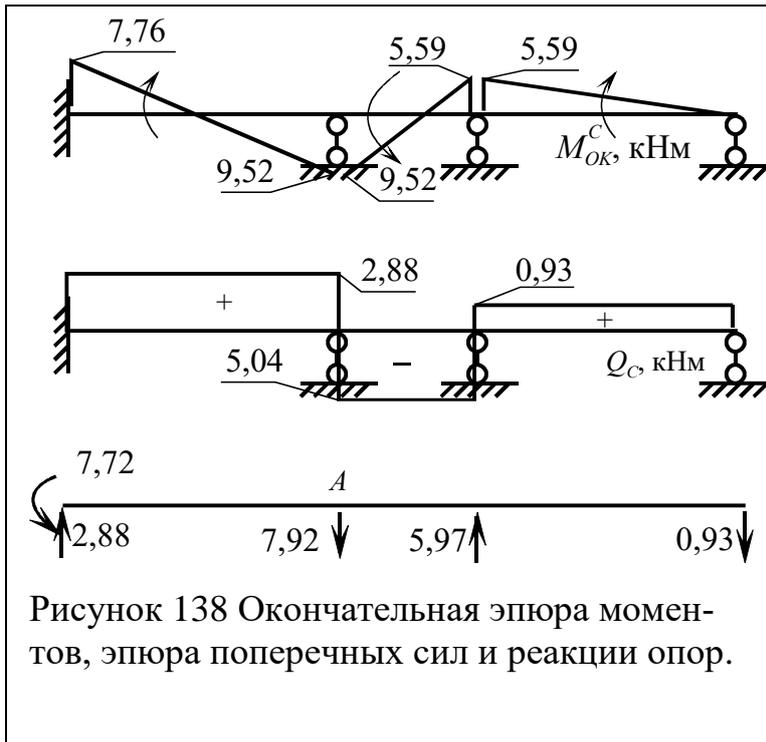
$$\frac{6 \cdot 100}{6} \cdot 0,06 = 6 \text{ кНм}, \text{ а для среднего } \frac{6 \cdot 2 \cdot 100}{3} \cdot 0,06 = 24 \text{ кНм}. \text{ Для грузовых ко-}$$

эффицентов получим  $R_{1C} = 24 - 6 = 18$  и  $R_{2C} = 24$ . Запишем и решим систему канонических уравнений метода перемещений:

$$12iZ_1 + 4iZ_2 + 18 = 0,$$

$$4iZ_1 + 11iZ_2 + 24 = 0.$$

$$Z_1 = -\frac{0,879}{i}, \quad Z_2 = -\frac{1,862}{i}.$$



Зная величины  $Z_1$  и  $Z_2$  построим окончательную эпюру изгибающих моментов  $M_{ок}^C = M_1Z_1 + M_2Z_2 + M_C$  (рисунок 138).

По эпюре моментов построим эпюру поперечных сил, далее по скачкам на эпюре  $Q$  вычислим опорные реакции, и проверим равновесие балки.

$$\sum F_y = 2,88 - 7,92 + 5,97 - 0,93 = 8,85 - 8,85 = 0$$

$$\sum M_A = 2,88 \cdot 6 + 0,93 \cdot 9 - 7,72 - 5,97 \cdot 3 = 25,65 - 25,63 = 0,02 \approx 0$$

**Задача 17.** Расчет статически неопределимой балки по линиям влияния с помощью ЭВМ.

Требуется:

1. Построить линии влияния изгибающих моментов в указанных сечениях балки и линию влияния указанной опорной реакции.
2. Вычислить усилия по линиям влияния от заданной нагрузки.
3. Построить эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки, найти опорные реакции. Сравнить результаты с полученными по линиям влияния.

Исходные данные принять по таблице 18, расчетную схему по рисунку 139.

Расчет выполняется с помощью программного комплекса МИИТа. Рекомендации по работе с комплексом приведены в [5].

Таблица 18.

Исходные данные к задаче 17.

Алфавит	$l_{1,м}$	$l_{2,м}$	$l_{3,м}$	$l_{4,м}$	$q, кН/м$	$P, кН$	Расчетные сечения	Расчетная реакция
а б в	3	3	3	3	2	10	1, 2	$R_1$
г д е	4	4	4	4	3	15	1, 3	$R_2$
ж з и й	6	6	6	6	4	20	2, 4	$R_3$
к л м	8	8	8	8	6	25	3, 4	$R_4$
н о п	12	12	12	12	8	30	1, 2	$R_5$
р с т	3	3	3	3	2	10	1, 3	$R_1$
у ф х	4	4	4	4	3	15	2, 4	$R_2$
ц ч ш	6	6	6	6	4	20	3, 4	$R_3$
щ ь ы ь	8	8	8	8	6	25	1, 2	$R_4$
э ю я	12	12	12	12	8	30	3, 4	$R_5$

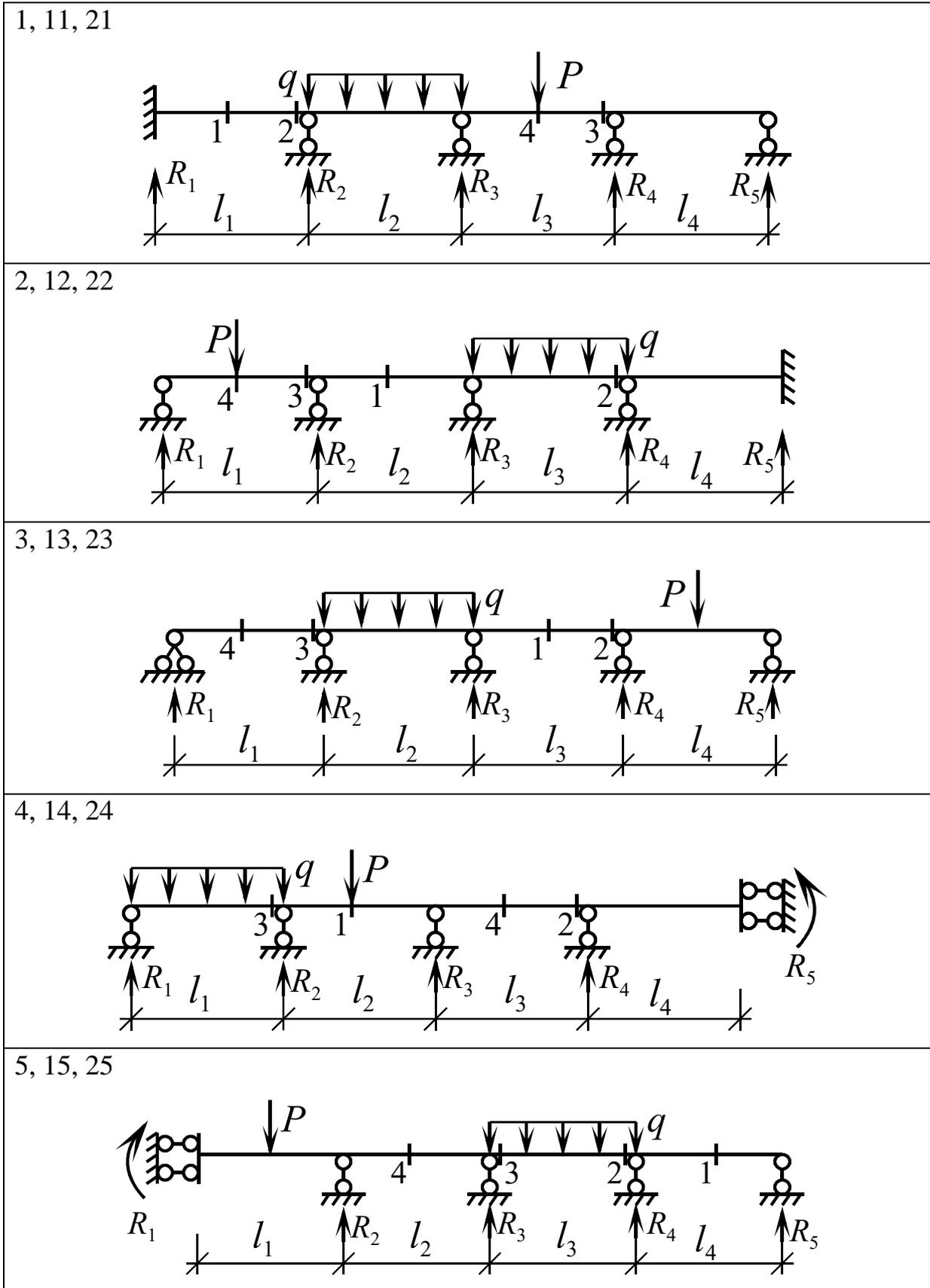
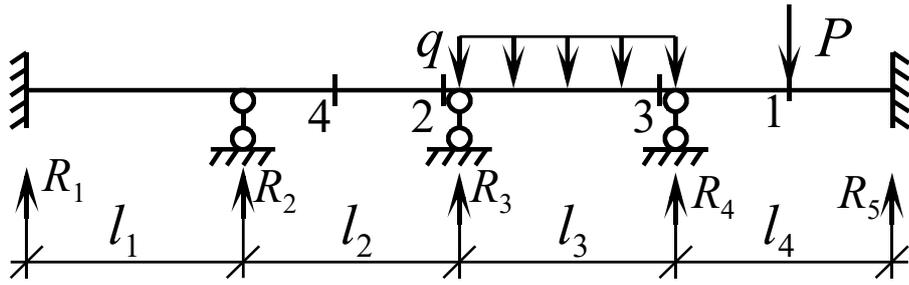
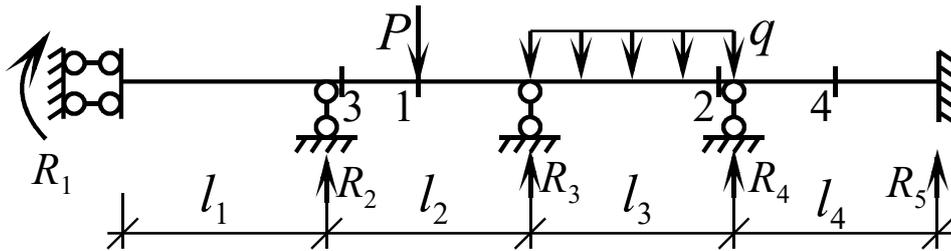


Рисунок 139. Расчетные схемы к задаче 17.

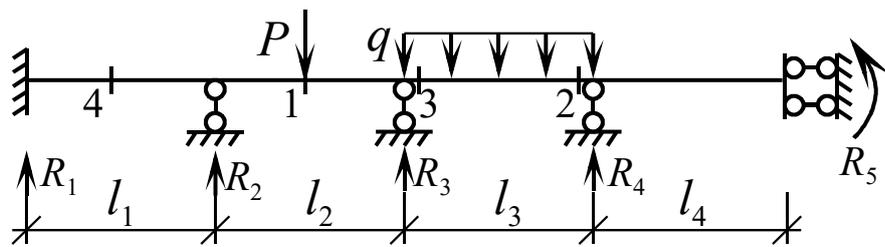
6, 16, 26



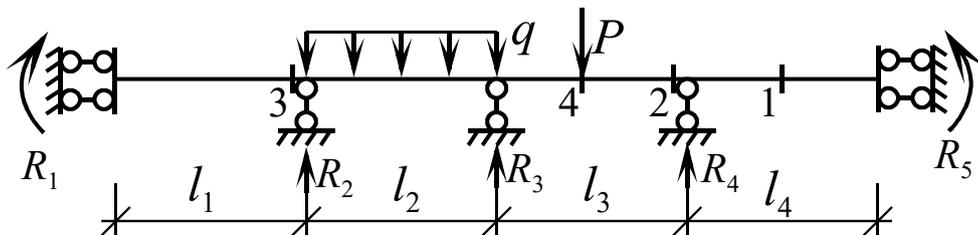
7, 17, 27



8, 18, 28



9, 19, 29



10, 20, 30

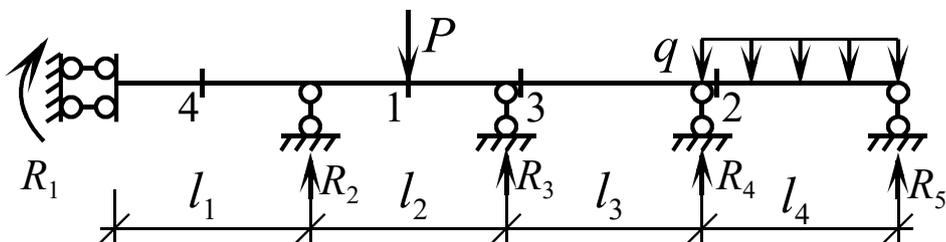


Рисунок 139. Расчетные схемы к задаче 17 (окончание).

**Задача 18.** Расчет рамы с учетом пластических деформаций.

Требуется:

1. Вычислить расчетный и предельный изгибающие моменты.
2. Найти расчетную и предельную нагрузку, коэффициент запаса и построить соответствующие эпюры изгибающих моментов.
3. Построить эпюру остаточных изгибающих моментов.

Исходные данные принять по таблице 19, расчетная схема выбирается по рисунку 140. Характеристики сечений приведены в приложении Д.

Таблица 19.

Исходные данные к задаче 18.

Алфавит	$l$ , м	$h$ , м	$P_1$ , кН	$P_2$ , кН	$P_3$ , кН	Сечение, № двутавра	$\sigma_T / R_y$ МПа
а б в	3	2	$2P$	$P$	$2P$	18	240/220
г д е	4	3	$P$	$2P$	$2P$	20	250/230
ж з и й	5	4	$2P$	$P$	$2P$	22	260/240
к л м	6	2	$P$	$2P$	$2P$	24	270/250
н о п	8	3	$2P$	$P$	$2P$	27	280/260
р с т	3	4	$P$	$2P$	$2P$	30	290/270
у ф х	4	2	$2P$	$P$	$2P$	33	300/280
ц ч ш	5	3	$P$	$2P$	$2P$	36	310/290
щ ь ы ь	6	4	$2P$	$P$	$2P$	40	320/300
э ю я	8	2	$P$	$2P$	$2P$	45	330/310

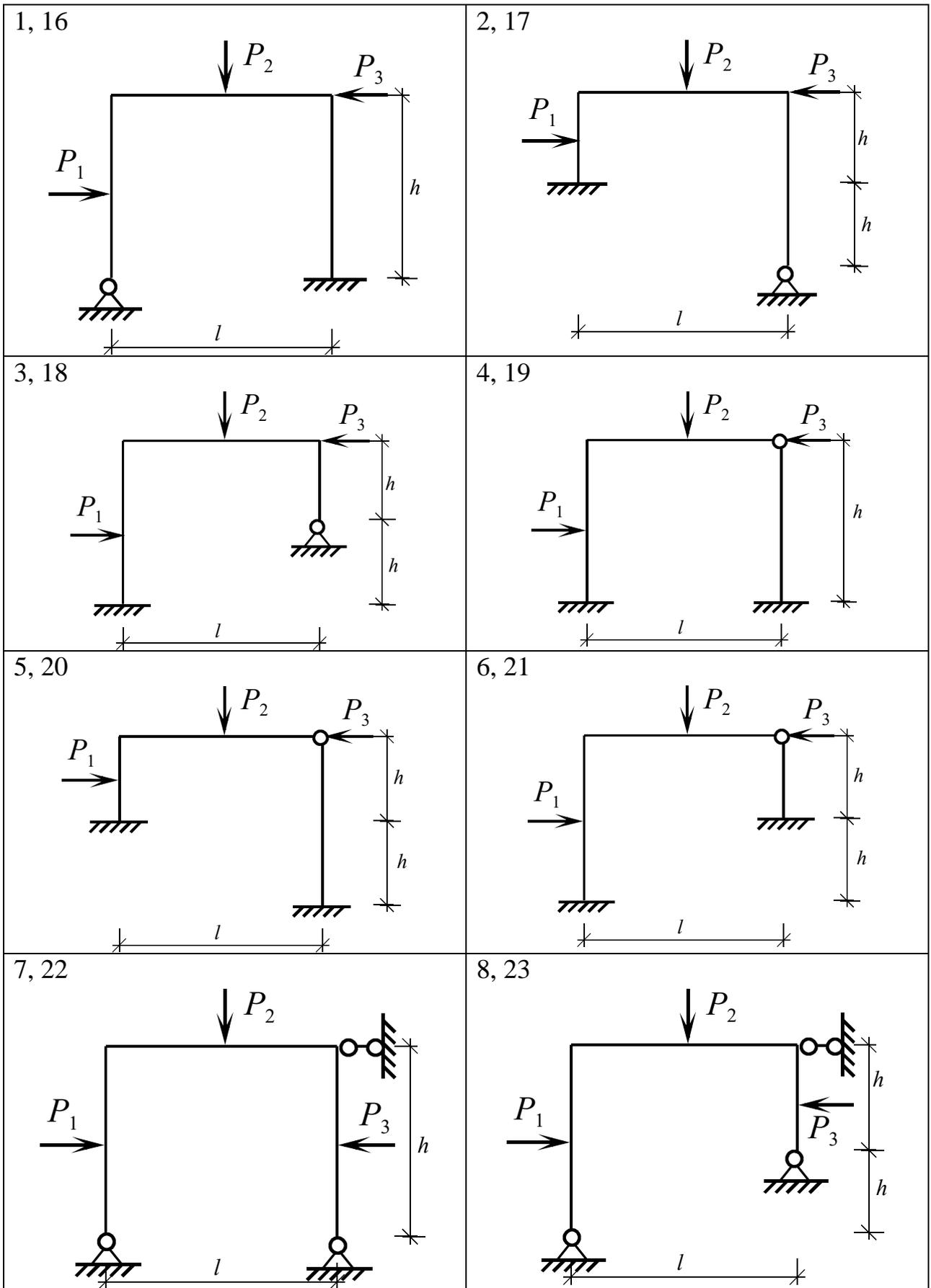


Рисунок 140. расчетные схемы к задаче 18.

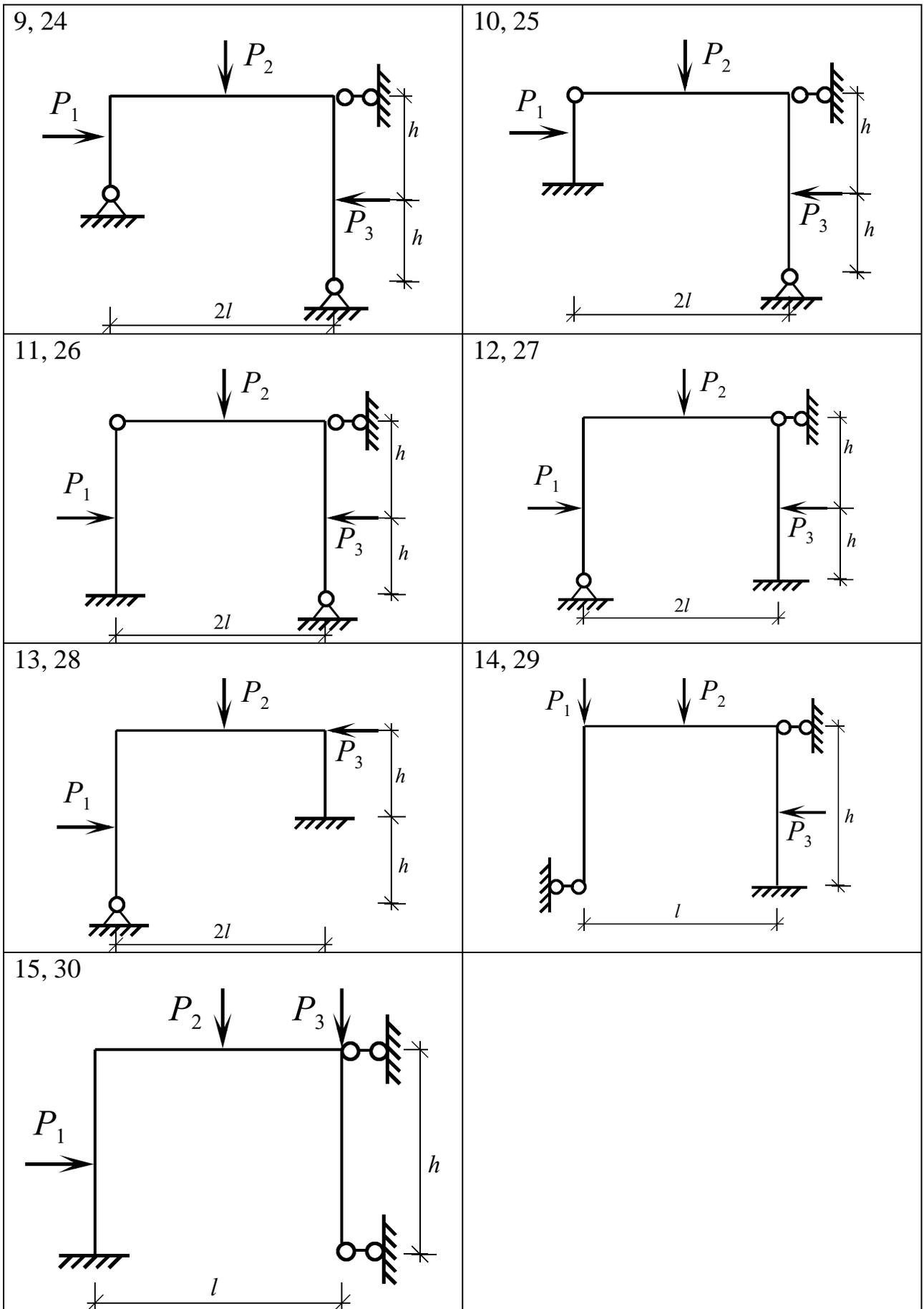
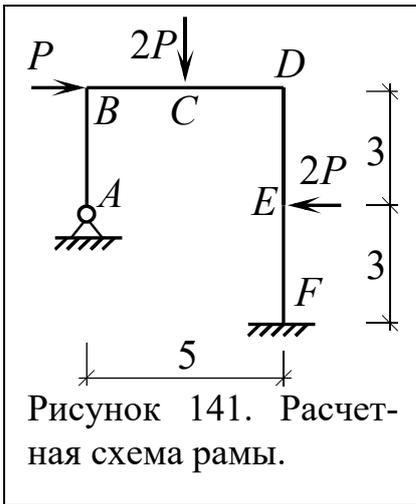


Рисунок 140. расчетные схемы к задаче 18 (окончание).



### Пример

Требуется найти расчетную нагрузку, предельную нагрузку и коэффициент запаса, а также построить эпюру остаточных изгибающих моментов.

Рассмотрим раму, показанную на рисунке 141.

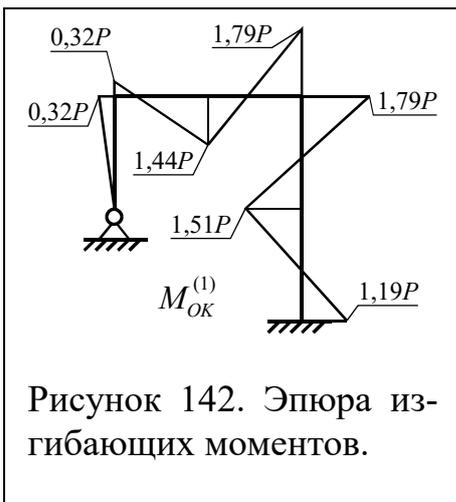
Пусть предел текучести материала стержней равен  $\sigma_T = 255$  МПа, расчетное сопротивление материала  $R_y = 225$  МПа. Стержни рамы изготовлены из двутавра №27а, для которого из таблицы сортамента (приложение Д) найдем момент сопротивления  $W_Z = 407,0 \text{ см}^3$  и статический момент полусечения  $S_X^{1/2} = 229,0 \text{ см}^3$ . По этим данным вычислим расчетный и предельный изгибающие моменты:

$$M_{РАСЧ} = R_y W_Z = 225 \cdot 10^3 \cdot 407 \cdot 10^{-6} = 91,6 \text{ кНм},$$

$$W_{ПЛ} = 2S_X^{1/2} = 2 \cdot 229 = 458 \text{ см}^3,$$

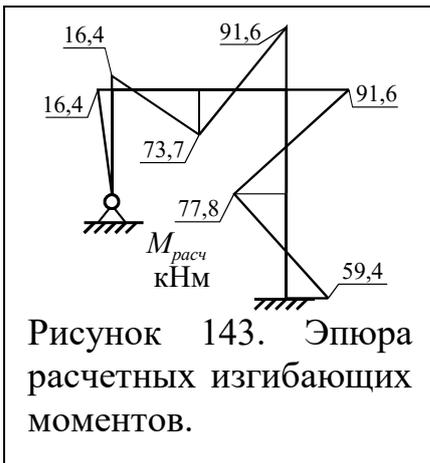
$$M_{ПР} = \sigma_T W_{ПЛ} = 255 \cdot 10^3 \cdot 458 \cdot 10^{-6} = 116,8 \text{ кНм},$$

где  $W_{ПЛ}$  - пластический момент сопротивления.

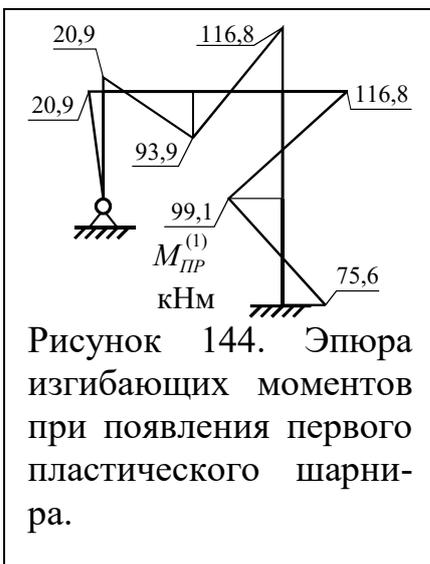


Расчетную нагрузку найдем из условия  $M_{\max} = M_{РАСЧ}$ . Для этого используя, например, метод сил (см. задачу 11), построим эпюру изгибающих моментов (рисунок 142), и получим  $M_{\max} = M_{РАСЧ} = 1,79P = 91,6 \text{ кНм}$ , откуда

$$P_{расч} = \frac{91,6}{1,79} = 51,2 \text{ кН}.$$



По найденному значению расчетной нагрузки построим эпюру  $M_{расч}$  (рисунок 143). Для этого необходимо все ординаты эпюры  $M_{OK}^{(1)}$  (рисунок 142) умножить на величину расчетной нагрузки.



Заданная рама дважды статически неопределима ( $L=2$ ), т.е., чтобы она потеряла несущую способность в ее сечениях должно образоваться  $L+1=3$  пластических шарнира. Найдем значение силы  $P$ , при котором появится первый. Пластический шарнир появится в сечении с максимальным моментом, т.е. в узле  $D$ . Величину нагрузки, при которой это произойдет, найдем из соотношения

$$M_{max} = 1,79P_{ПР}^1 = M_{ПР} = 116,8 \text{ кНм,}$$

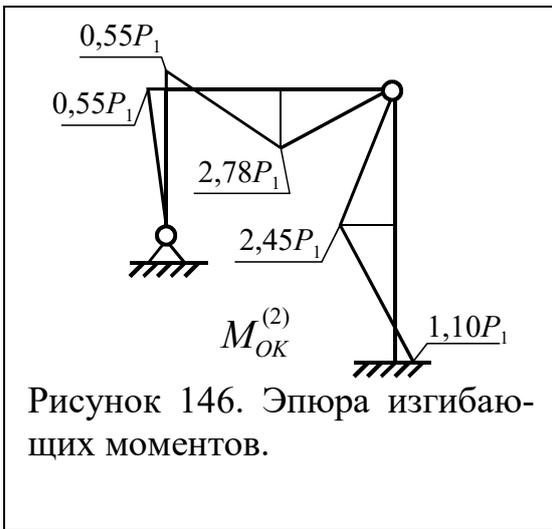
откуда

$$P_{ПР}^1 = \frac{116,8}{1,79} = 65,2 \text{ кН.}$$



Подставив в ординаты эпюры моментов  $M_{OK}^{(1)}$  найденное значение силы  $P$ , получим моменты, соответствующие появлению пластического шарнира  $M_{ПР}^{(1)}$  (рисунок 144). После этого изменится расчетная схема рамы. Новая схема приведена на рисунке 145. Теперь рама имеет одну лишнюю связь ( $L=1$ ). Снова раскрывая статическую неопределимость, получим эпюру мо-

ментов (рисунок 146).



Найдем силу  $P_1$ , которую необходимо добавить к силе  $P_{II}^1$ , чтобы появился второй пластический шарнир. Для этого рассмотрим два варианта: пластический шарнир в сечении  $C$ :

$$M_{II} = 116,8 = 93,9 + 2,78P_1,$$

$$P_1 = \frac{116,8 - 93,9}{2,78} = 8,24 \text{ кН},$$

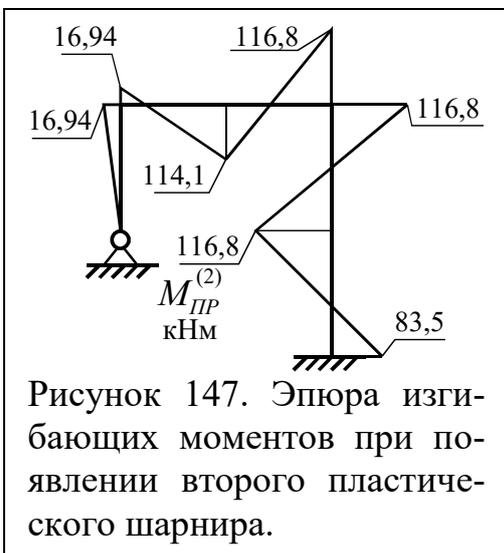
пластический шарнир в сечении  $E$ :

$$M_{II} = 116,8 = 99,1 + 2,45P_1,$$

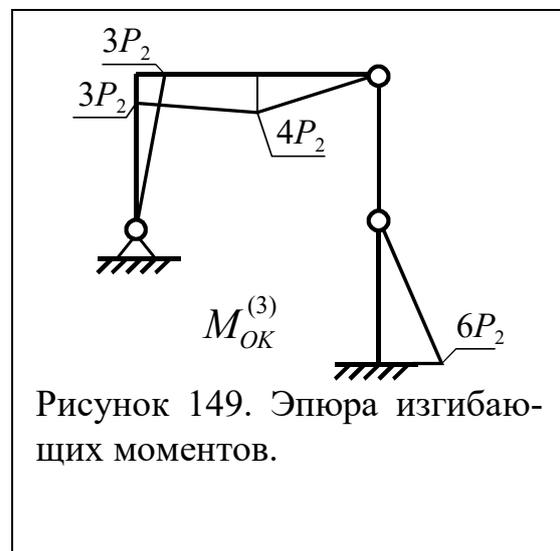
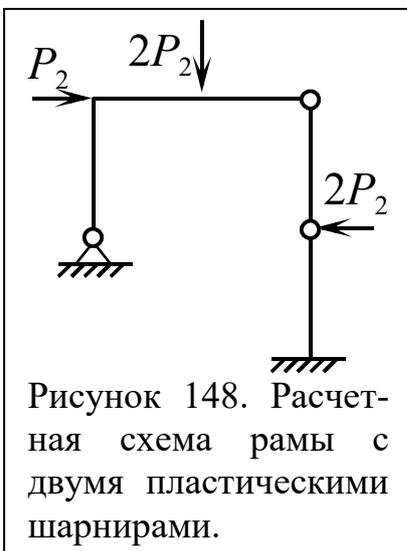
$$P_1 = \frac{116,8 - 99,1}{2,45} = 7,22 \text{ кН}.$$

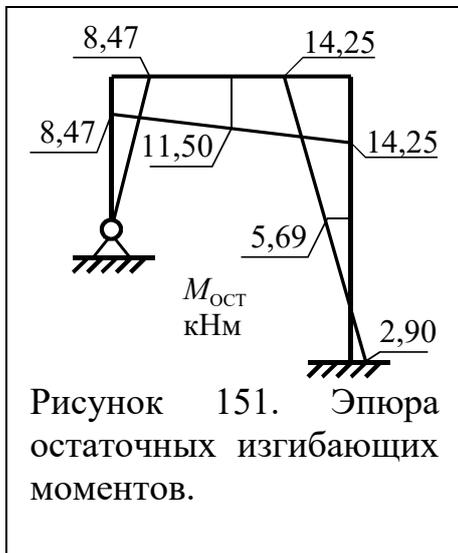
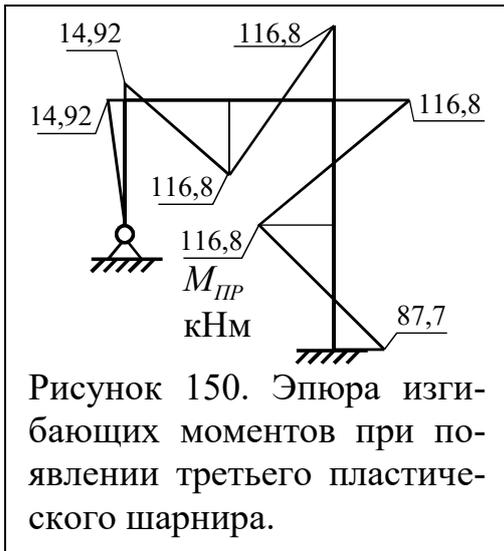
Из этих двух значений следует выбрать наименьшее  $P_1 = 7,22$  кН. Таким образом, второй пластический шарнир появится в сечении  $E$  при нагрузке

$$P_{II}^2 = P_{II}^1 + P_1 = 65,2 + 7,22 = 72,42 \text{ кН}.$$



Эпюру изгибающих моментов при образовании второго пластического шарнира можно получить по принципу независимости действия сил:





$$M_{ПР}^{(2)} = M_{ПР}^{(1)} + M_{ОК}^{(2)} \cdot P_1.$$

Эпюра изгибающих моментов показана на рисунке 147.

Расчетная схема рамы снова изменяется (рисунок 148). Теперь рама становится статически определимой. Эпюра изгибающих моментов в такой раме показана на рисунке 149. Появление пластического шарнира возможно в середине ригеля (сечение С):

$$M_{ПР} = 116,8 = 114,1 + 4P_2,$$

$$P_2 = \frac{116,8 - 114,1}{4} = 0,68 \text{ кН},$$

или в заделке F:

$$M_{ПР} = 116,8 = 83,5 + 6P_2,$$

$$P_2 = \frac{116,8 - 83,5}{6} = 5,48 \text{ кН}.$$

Выбираем  $P_2 = 0,68 \text{ кН}$ ,

Найдем нагрузку, при которой появля-

ется третий пластический шарнир:

$$P_{ПР} = P_{ПР}^2 + P_2 = 72,42 + 0,68 = 73,1 \text{ кН},$$

и соответствующую этой нагрузке эпюру моментов:

$$M_{ПР} = M_{ПР}^{(2)} + M_{ОК}^{(3)} \cdot P_3.$$

После появления третьего пластического шарнира рама становится геометрически изменяемой и не может воспринимать нагрузку.

Для разгрузки приложим к раме силы с параметром  $P = -P_{ПР} = -73,1 \text{ кН}$ , и получим эпюру остаточных моментов (рисунок 151):

$$M_{ОСТ} = M_{ПР} - M_{ОК}^{(1)} \cdot P_{ПР}.$$

Найдем коэффициент запаса:

$$k = \frac{P_{III}}{P_{PACU}} = \frac{73,1}{51,2} = 1,43.$$

Заметим, что предельное состояние может наступить и при меньшем количестве пластических шарниров. Это может произойти, если три шарнира (опорные, врезанные или пластические) будут расположены на одной прямой.

**Задача 19.** Расчет симметричной рамы с помощью ЭВМ.

Требуется:

1. Представить отдельно нагрузку и осадку опор в виде суммы симметричной и кососимметричной.
2. Выполнить расчет половины рамы отдельно на симметричную и кососимметричную составляющие.
3. Построить эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки и осадки опор.

Исходные данные принять по таблице 20, расчетная схема выбирается по рисунку 152. Модуль упругости материала стержней  $E = 2 \cdot 10^8$  кПа. Характеристики сечений двутавров приведены в приложении Д.

Таблица 20.

Исходные данные к задаче 19.

Алфавит	$l$ , м	$h$ , м	$q$ , кН/м	$P_1$ , кН	$P_2$ , кН	Осадка $C$ , (для линейных – м, для угловых – рад)	Сечения стержней, номер двутавра	
							ригель	стойка
а б в	2	2	2	10	10	0,01	12	12
г д е	3	3	3	15	15	0,02	14	14
ж з и й	4	4	4	20	20	0,03	16	16
к л м	6	6	6	25	25	0,04	18	18
н о п	8	8	8	30	30	0,05	20	20
р с т	2	2	2*	10*	10*	0,01*	20а	20а
у ф х	3	3	3*	15*	15*	0,02*	22	22
ц ч ш	4	4	4*	20*	20*	0,03*	22а	22а
щ ь ы ь	6	6	6*	25*	25*	0,04*	24	24
э ю я	8	8	8*	30*	30*	0,05*	24а	24а

Примечание: знак (\*) означает, что направление нагрузки (осадки) следует изменить на противоположное.

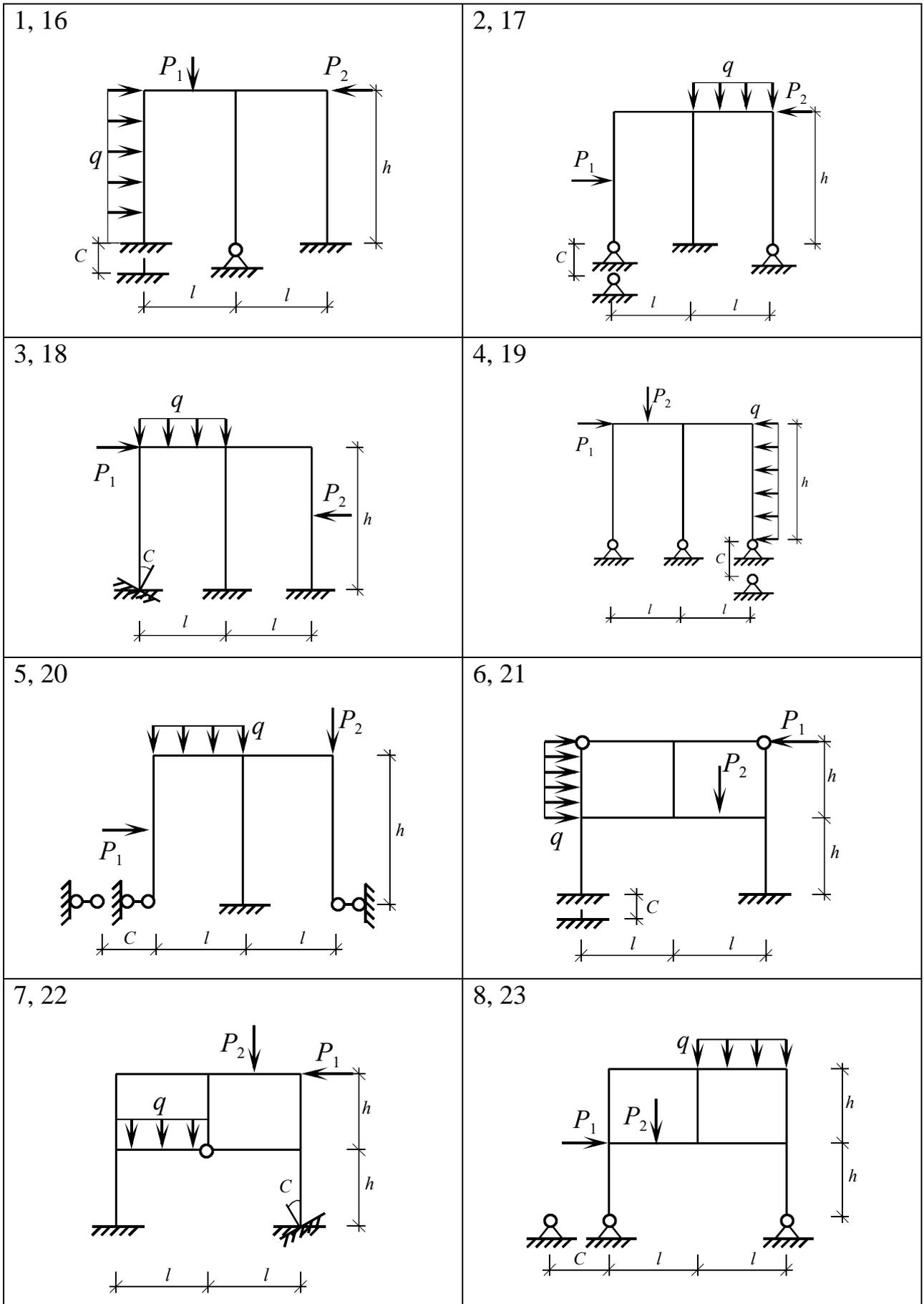


Рисунок 152. Расчетные схемы к задаче 19.

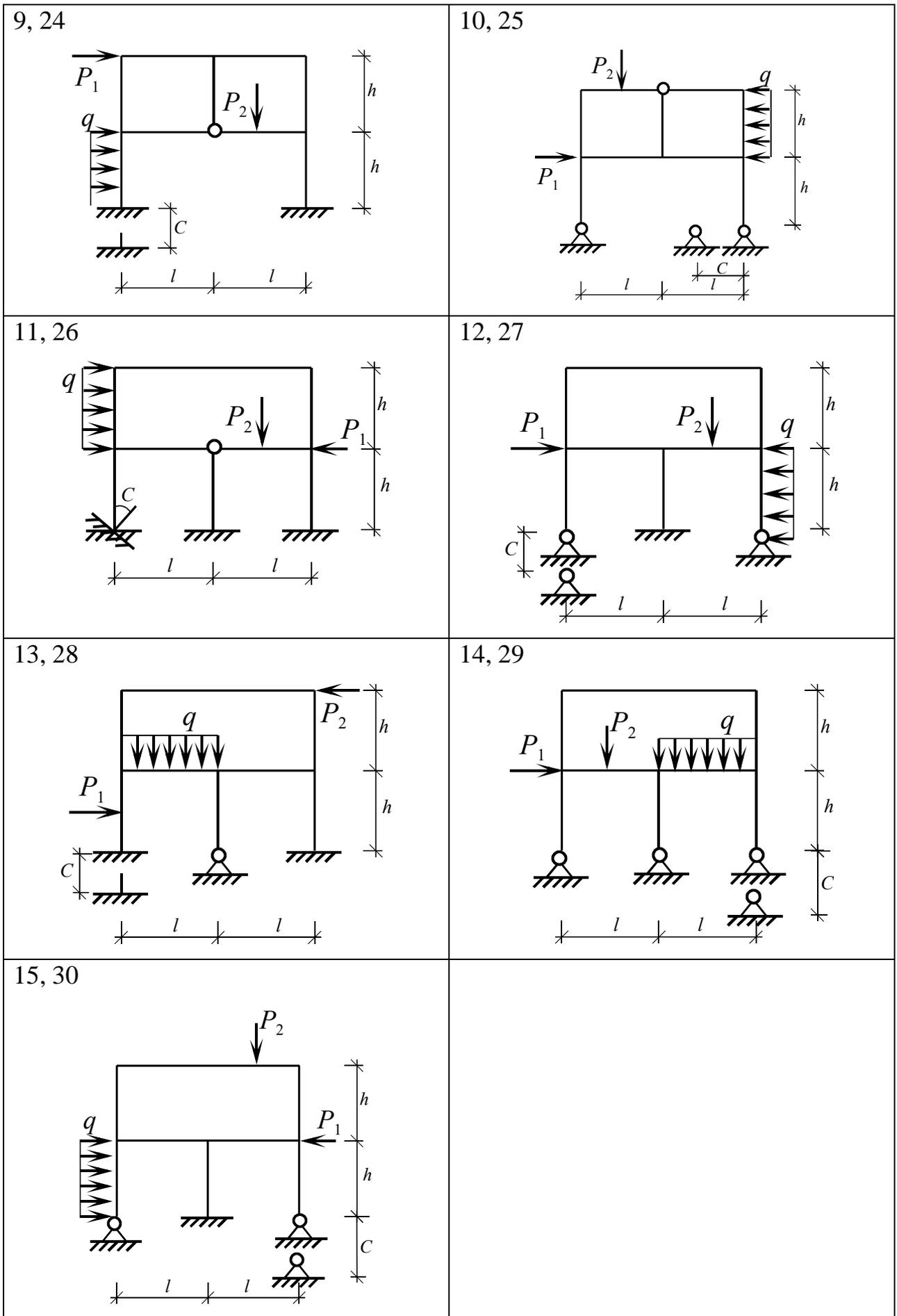
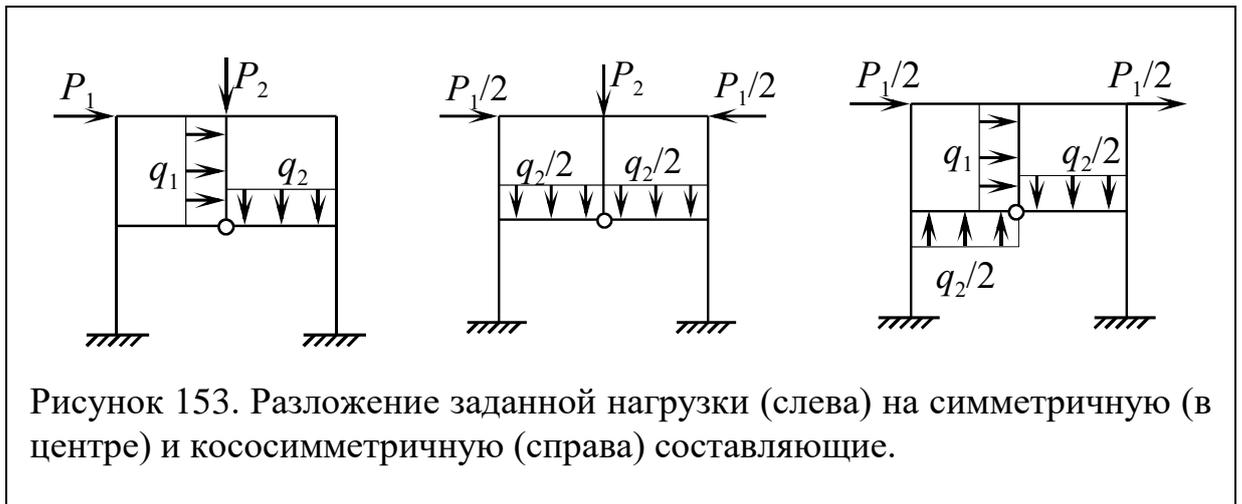
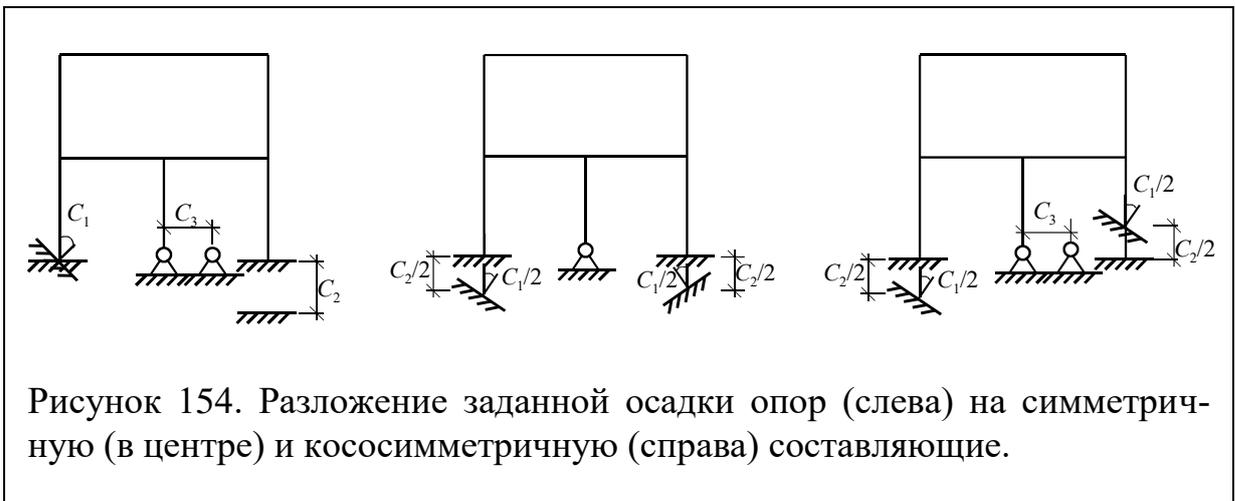


Рисунок 152. Расчетные схемы к задаче 19 (окончание).



При разложении нагрузки (или осадки опор) на симметричную и кососимметричную составляющие следует перенести на каждую из двух схем нагружения половину указанного воздействия, а затем добавить на одной схеме симметрично, а на другой кососимметрично вторую половину нагружения. При этом вертикальные нагрузки и осадки опор симметрично направлены в одну сторону, горизонтальные – в разные, как показано на рисунках

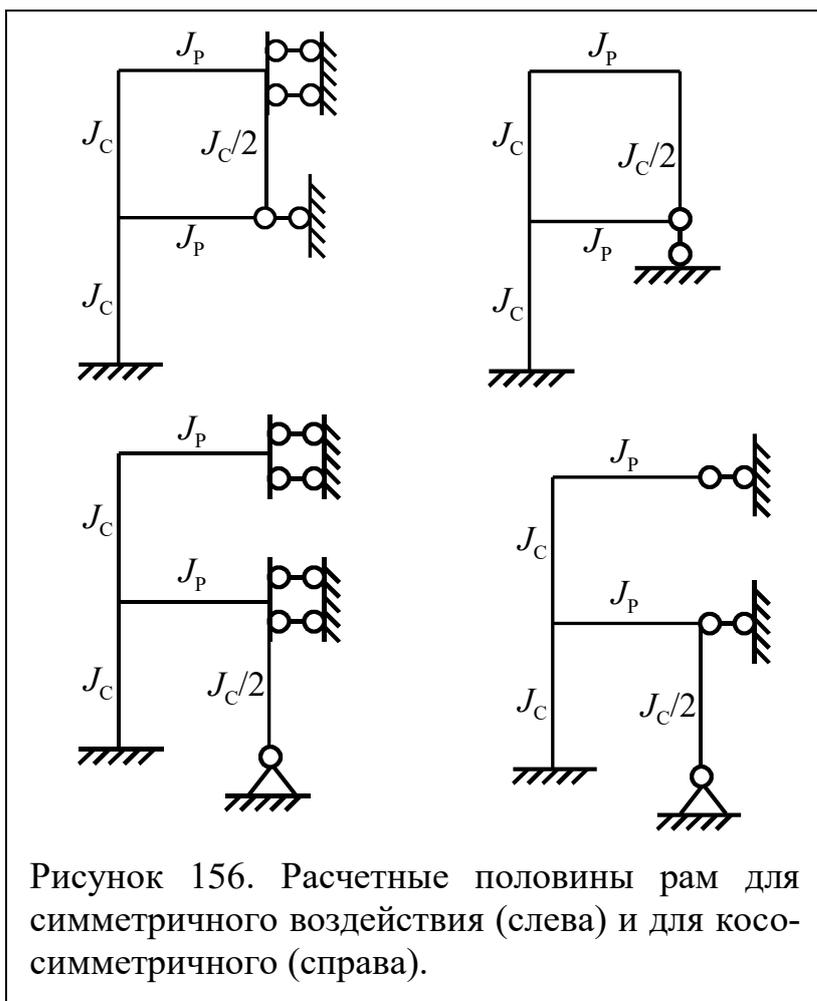


153 и 154. При кососимметричной – наоборот, вертикальные нагрузки и осадки опор направлены разные стороны, симметричные – в одну сторону. Нагрузка изначально симметричная или кососимметричная переносится полностью на соответствующую схему нагружения.

При расчете половины рамы после разложения нагрузки на симметричную и кососимметричную составляющие отброшенную часть необходимо заменить опорами:

- при симметричном нагружении ползун, либо горизонтальная шарнирно подвижная опора (если есть врезанный шарнир)
- при кососимметричном нагружении вертикальная шарнирно подвижная опора

Пример расчетных половин рам, представленных на рисунках 153 и 154 показан на рисунке 155

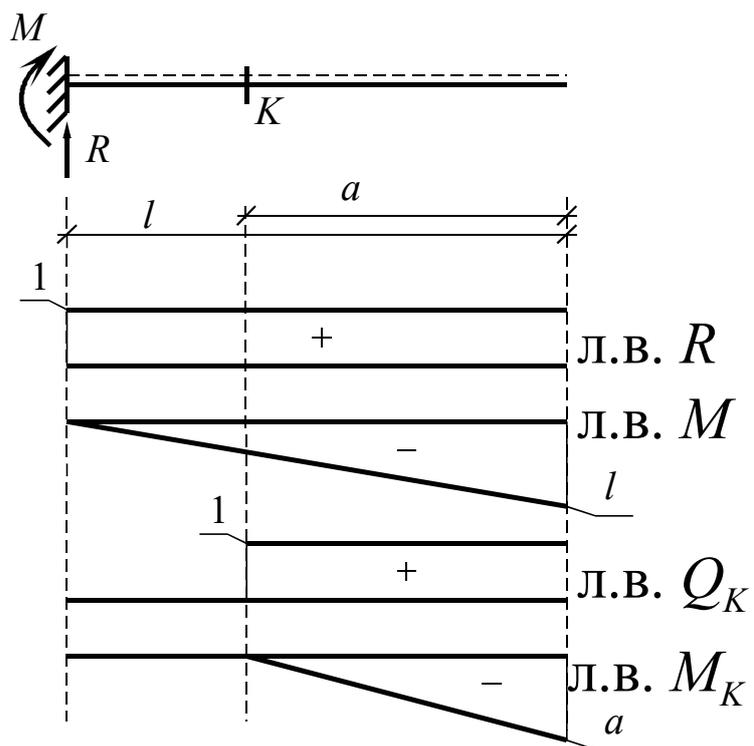
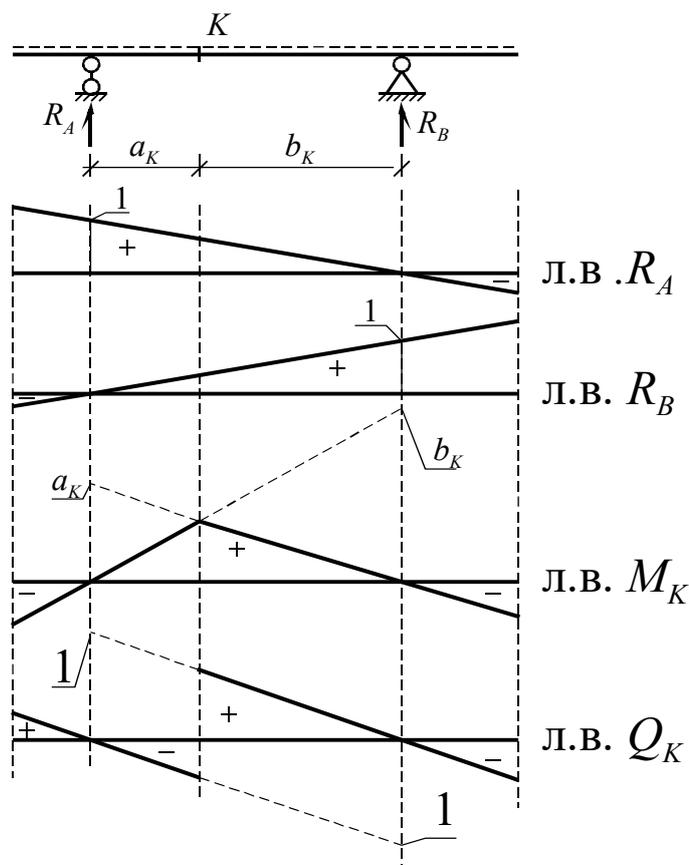


Если на оси симметрии расположена стойка, то ее жесткость следует уменьшить в два раза.

## Библиографический список

1. А.В. Дарков. Строительная механика : учебник / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. - 11-е изд., стер. - СПб. [и др.] : Лань, 2008. - 655 с.
2. Строительная механика: учебник / И. А. Константинов, В. В. Лалин, И. И. Лалина ; С.-Петербур. гос. политехн. ун-т. - М. : Проспект, 2015. - 425 с
3. Динамика и устойчивость искусственных сооружений: Уч. пособие / А.И. Круглов, П.Г. Суровин, А.П. Шабанов. – Новосибирск: Изд-во СГУПСа, 2011. – 315 с.
4. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики (статика стержневых систем). Под ред. Клейна К.К. М., Высшая школа, 1980. – 384с.
5. Ахметзянов М.Х., Карманова Т.Ф., Суровин П.Г. Расчет балок и плит на упругом основании.: Учебное пособие. - Новосибирск: изд. СГУПСа, 2014. – 103с.
6. Зиновьев Б.М., Карманова Т.Ф. Плоские стержневые статически определимые системы.: Учебное пособие. - Новосибирск: изд. СГУПСа, 2002. – 118с.
7. Зиновьев Б.М., Карманова Т.Ф. Плоские стержневые статически неопределимые системы.: Учебное пособие. - Новосибирск: изд. СГУПСа, 2005. – 89с.
8. Сборник задач по сопротивлению материалов.: Учеб пособие / П.В. Грес, В.Н. Агуленко, Л.А. Краснов и др. – М.: Абрис, 2012. – 103 с.

Линии влияния усилий в простых балках



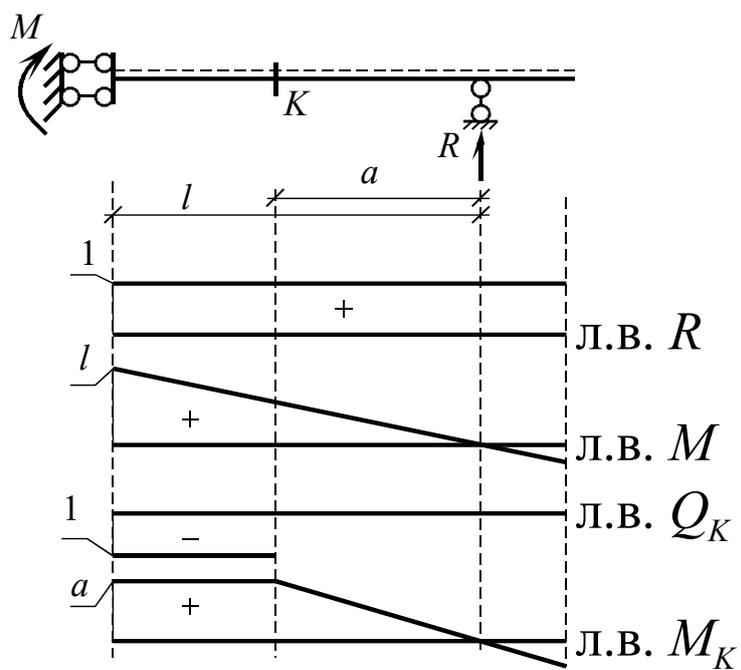


Таблица эквивалентных нагрузок для треугольных линий влияния.

Выписка из СНиП 2.05.03-84\* (для учебных целей).

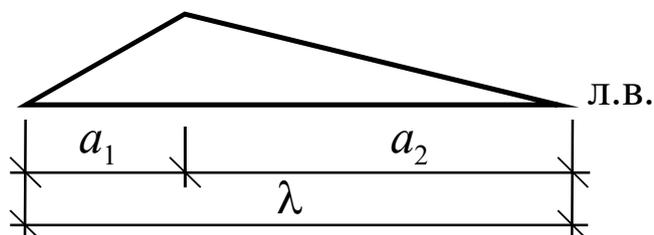
Длина загрузки $\lambda$ , м	Интенсивность эквивалентной нагрузки, кН/м (класс 14)	
	$\alpha = 0$	$\alpha = 0,5$
1	686,5	686,5
1,5	548,1	479,5
2	427,7	374,2
3	338,3	296,0
4	303,7	265,8
5	285,2	249,5
6	272,9	238,8
7	263,7	230,7
8	256,4	224,4
9	250,2	218,9
10	244,5	214,0
12	234,9	205,5
14	226,6	198,3
16	219,3	191,8
18	212,7	186,0
20	206,6	180,8
25	193,9	169,7
30	183,4	160,5
35	175,0	153,2
40	168,2	147,2
45	162,6	142,2
50	158,0	138,3

60	151,1	137,3
70	146,6	137,3
80	143,6	137,3
90	141,4	137,3
100	140,0	137,3
110	139,3	137,3
120	138,6	137,3
130	138,1	137,3
140	137,9	137,3
150 и более	137,3	137,3

Примечания:

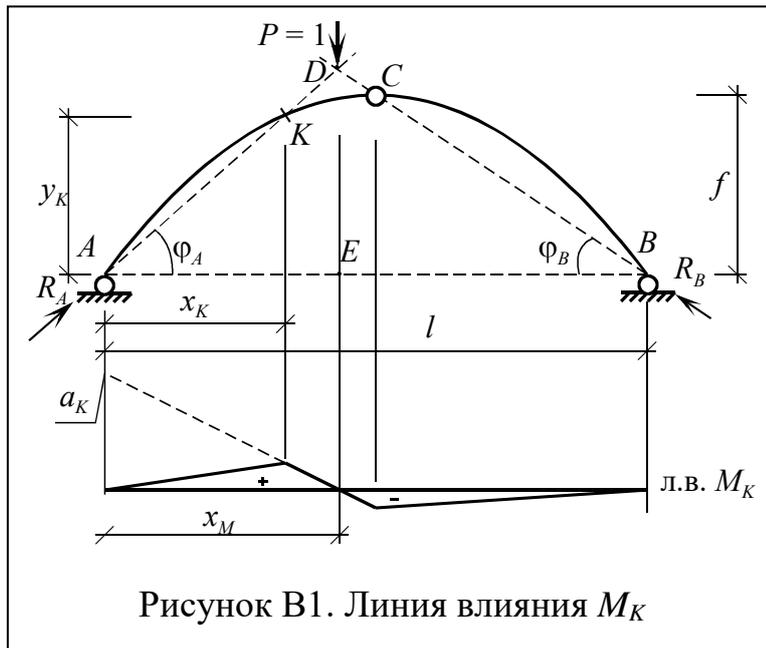
1.  $\lambda$  – длина загрузки (между нулями линии влияния),

$$\alpha = \min(a_1, a_2) / \lambda \leq 0,5$$



2. Для промежуточных значений  $\lambda$  и  $\alpha$  величину нагрузки принимать по интерполяции.

Линии влияния усилий в трехшарнирной арке.



Линия влияния изгибающего момента. Определим положение нулевой точки для линии влияния изгибающего момента (рисунок В1)  $x_M$ . Из треугольника  $AED$  найдем

$$DE = AE \cdot \operatorname{tg} \varphi_A.$$

С другой стороны из треугольника  $BED$  найдем

$$DE = BE \cdot \operatorname{tg} \varphi_B.$$

Так как  $AE = x_M$  и  $BE = l - x_M$ , то

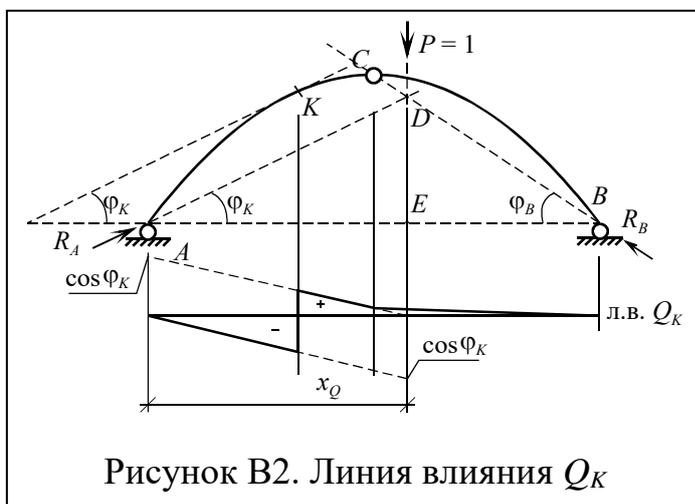
$$DE = x_M \cdot \operatorname{tg} \varphi_A = (l - x_M) \cdot \operatorname{tg} \varphi_B.$$

Отсюда находим

$$x_M = \frac{l \cdot \operatorname{tg} \varphi_B}{\operatorname{tg} \varphi_A + \operatorname{tg} \varphi_B}.$$

Тангенсы углов  $\varphi_A$  и  $\varphi_B$  можно определить из соотношений

$$\operatorname{tg} \varphi_A = \frac{y_K}{x_K}, \quad \operatorname{tg} \varphi_B = \frac{f \cdot 2}{l}.$$



Линия влияния поперечной силы. Найдем положение нулевой точки  $x_Q$  (рисунок В2). Так же, как и для линии влияния момента из треугольников  $AED$  и  $BED$  получим

$$DE = AE \cdot \operatorname{tg} \varphi_K,$$

$$DE = BE \cdot \operatorname{tg} \varphi_B,$$

$$DE = x_Q \cdot \operatorname{tg} \varphi_K = (l - x_Q) \cdot \operatorname{tg} \varphi_B.$$

$$x_Q = \frac{l \cdot \operatorname{tg} \varphi_B}{\operatorname{tg} \varphi_K + \operatorname{tg} \varphi_B}.$$

Тангенс угла  $\varphi_K$  можно определить как производную функции, которой задано очертание арки

$$\operatorname{tg} \varphi_K = y'(x_K).$$

Линия влияния продольной силы.

Найдем найти нулевую точку  $x_N$ . Снова рассмотрим треугольники  $AED$  и  $BED$  (рисунок В3):

$$DE = AE \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \varphi_K),$$

$$DE = BE \cdot \operatorname{tg} \varphi_B,$$

$$DE = x_N \cdot \operatorname{ctg} \varphi_K = (l + x_N) \cdot \operatorname{tg} \varphi_B,$$

$$x_N = \frac{l \cdot \operatorname{tg} \varphi_B}{\operatorname{ctg} \varphi_K - \operatorname{tg} \varphi_B}.$$

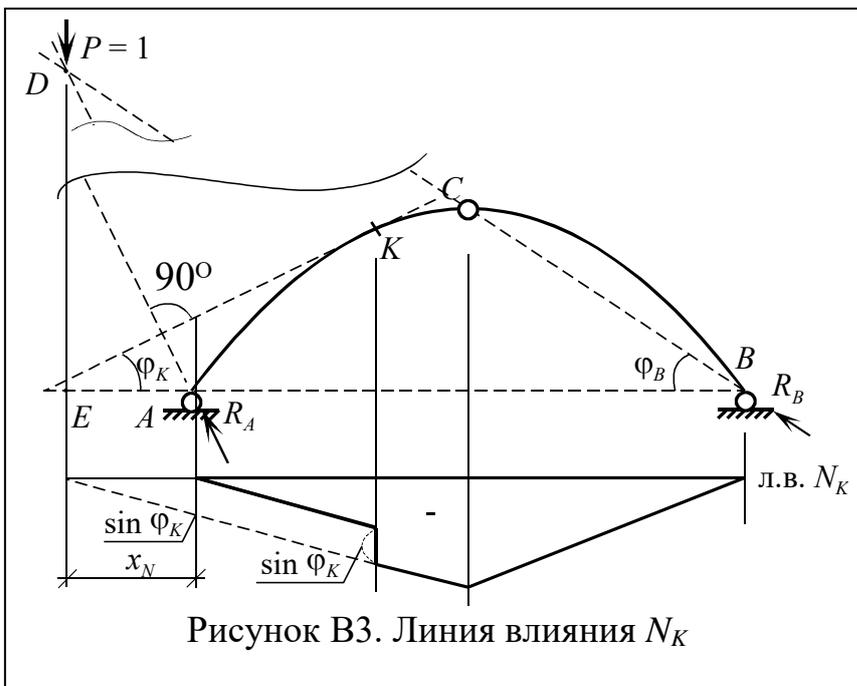
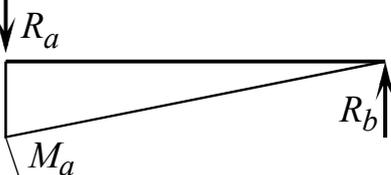
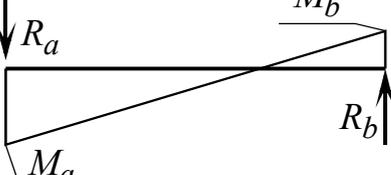
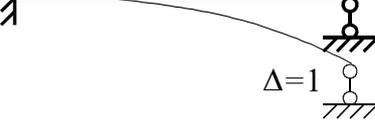
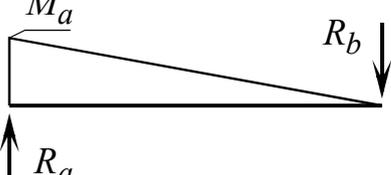
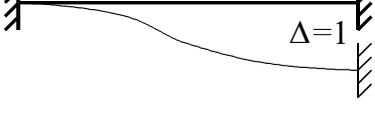
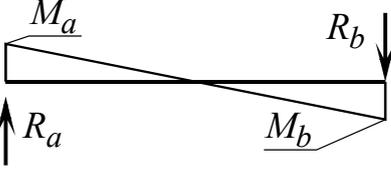
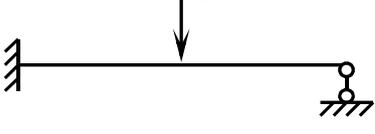
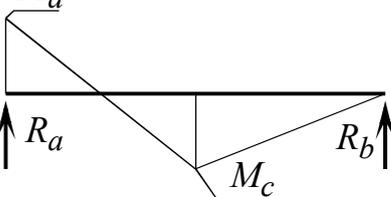
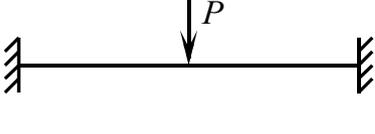
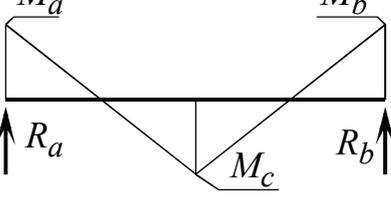
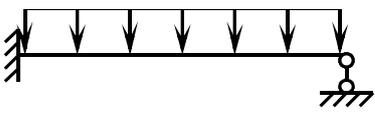
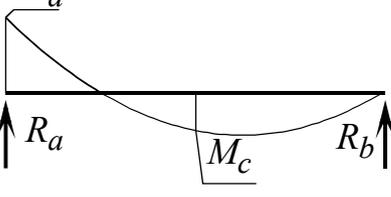
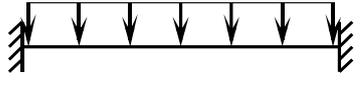
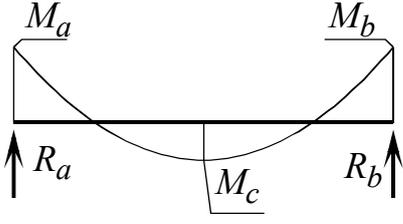
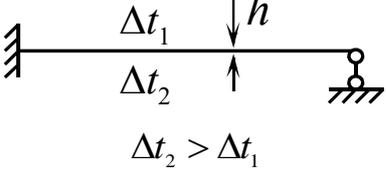
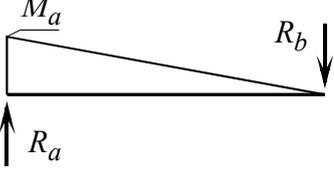
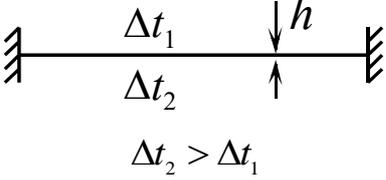
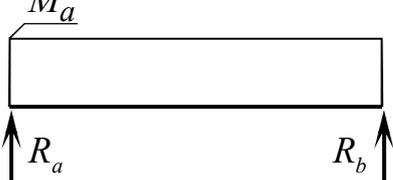


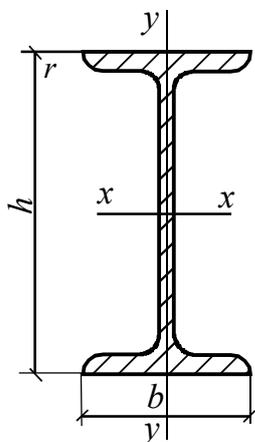
Таблица реакций метода перемещений.

Схема балки и деформированный вид	Эпюра моментов	Ординаты эпюры и реакции
		$M_a = 3i$ $R_a = R_b = \frac{3i}{l}$
		$M_a = 4i \quad M_b = 2i$ $R_a = R_b = \frac{6i}{l}$
		$M_a = \frac{3i}{l}$ $R_a = R_b = \frac{3i}{l^2}$
		$M_a = M_b = \frac{6i}{l}$ $R_a = R_b = \frac{12i}{l^2}$
		$M_a = \frac{3Pl}{16} \quad M_c = \frac{5Pl}{32}$ $R_a = \frac{11P}{16} \quad R_b = \frac{5P}{16}$
		$M_a = M_b = M_c = \frac{Pl}{8}$ $R_a = R_b = \frac{P}{2}$
		$M_a = \frac{ql^2}{8} \quad M_c = \frac{ql^2}{16}$ $R_a = \frac{5ql}{8} \quad R_b = \frac{3ql}{8}$

		$M_a = M_b = \frac{ql^2}{12}$ $M_c = \frac{ql^2}{24}$ $R_a = R_b = \frac{ql}{2}$
 <p style="text-align: center;"><math>\Delta t_2 &gt; \Delta t_1</math></p>		$M_a = \frac{3\alpha EJ(\Delta t_2 - \Delta t_1)}{2h}$ $R_a = R_b = \frac{3\alpha EJ(\Delta t_2 - \Delta t_1)}{2hl}$
 <p style="text-align: center;"><math>\Delta t_2 &gt; \Delta t_1</math></p>		$M_a = \frac{\alpha EJ(\Delta t_2 - \Delta t_1)}{h}$ $R_a = R_b = 0$

Примечание: эпюры моментов от изменения температуры откладываются в сторону алгебраически меньшего изменения температуры.

**Сталь горячекатаная. Балки двутавровые.  
Выписка из сортамента (ГОСТ 8239-89)  
Для учебных целей.**



$h$  – высота балки;  
 $b$  – ширина полки;  
 $J_x$  – момент инерции;  
 $S_x$  – статический момент полусечения.

Номер балки	Размеры балки, мм		Площадь сечения, см <sup>2</sup>	$J_x$ , см <sup>4</sup>	$W_x$ , см <sup>3</sup>	$S_x$ , см <sup>3</sup>
	$h$	$b$				
10	100	55	12,0	198	39,7	23,0
12	120	64	14,7	350	58,4	33,7
14	140	73	17,4	572	81,7	46,8
16	160	81	20,2	873	109,0	62,3
18	180	90	23,4	1290	143,0	81,4
18a	180	100	25,4	1430	159,0	89,8
20	200	100	26,8	1840	184,0	104,0
20a	200	110	28,9	2030	203,0	114,0
22	220	110	30,6	2550	232,0	131,0
22a	220	120	32,8	2790	254,0	143,0
24	240	115	34,8	3460	289,0	163,0
24a	240	125	37,5	3800	317,0	178,0
27	270	125	40,2	5010	371,0	210,0
27a	270	135	43,2	5500	407,0	229,0
30	300	135	46,5	7080	472,0	268,0
30a	300	145	49,9	7780	518,0	292,0
33	330	140	53,8	9840	597,0	339,0
36	360	145	61,9	13380	743,0	423,0
40	400	155	72,6	19062	953,0	545,0
45	450	160	84,7	27696	1231,0	708,0
50	500	170	100,0	39727	1589,0	919,0
55	550	180	118,0	55962	2035,0	1181,0
60	600	190	138,0	76806	2560,0	1491,0

## Содержание

Введение	3
Задача 1. Построение эпюр внутренних усилий в статически определимой раме.	7
Задача 2. Расчет статически определимой фермы.	17
Задача 3. Построение эпюр внутренних усилий в трехшарнирной арке.	21
Задача 4. Построение огибающих эпюр в балке.	25
Задача 5. Вычисление внутренних усилий в многопролетной шарнирной балке тремя способами.	35
Задача 6. Построение линий влияния усилий в стержнях ферм.	43
Задача 7. Построение линий влияния усилий в стержнях шпренгельных ферм.	53
Задача 8. Построение линий влияния внутренних усилий в арке.	63
Задача 9. Вычисление перемещений в статически определимой раме от нагрузки и осадки опор.	67
Задача 10. Вычисление перемещений в статически определимой раме от нагрузки и изменения температуры.	75
Задача 11. Расчет статически неопределимой рамы методом сил.	84
Задача 12. Расчет статически неопределимой балки методом сил.	95
Задача 13. Построение эпюр внутренних усилий в арке с затяжкой.	102
Задача 14. Расчет рамы методом перемещений на действие нагрузки, осадки опор и изменение температуры (3 доп. связи).	108
Задача 15. Расчет рамы методом перемещений (2 доп. связи).	131
Задача 16. Расчет балки методом перемещений.	140
Задача 17. Расчет статически неопределимой балки по линиям влияния с помощью ЭВМ.	146
Задача 18. Расчет рамы с учетом пластических деформаций.	149
Задача 19. Расчет симметричной рамы с помощью ЭВМ.	157

	Библиографический список	162
	Приложение А. Линии влияния усилий в простых балках.	163
	Приложение Б. Таблица эквивалентных нагрузок для треугольных линий влияния.	165
	Приложение В. Линии влияния усилий в трехшарнирной арке.	167
	Приложение Г. Таблица реакций метода перемещений.	169
	Приложение Д. Сталь горячекатаная. Балки двутавровые.	171

Учебное издание

Строительная механика.

Сборник задач для выполнения расчетно-графических работ.

Авторы: Карманова Татьяна Филипповна

Суровин Павел Геннадьевич